Trattato
D'OTTICA

Dell'Abbate Giuseppe Veneziani

Professore

di

Fisica-Matematica

Indice

delle Materie

Diminuzione della Luce prodotta dall' Atmosfera.

La luce degli astri non può arrivare al nostro occhio se prima non attraversi l'Atmosfera che circonda il nostro globo, e che per l'indole dei gaz di cui è composta, e per la enorme quantità dei vapori acquei, e di sostanze volatilizzate in essa sparse, e notanti, deve arrestare una quantità notabile di attomi di luce, e diminuirne per conseguenza la densità. La qual diminuzione, come è manifesto, sarà tanto maggiore, quanto più esteso sarà il tratto dell'atmosfera percorso dal raggio di luce.

Se dunque AFDG (fig.° 1.ª) rappresenti il globo terrestre, il cui raggio CA = r = 3440. miglie italiane; ZEHZ il limite dell'Atmosfera sensibile, e capace di agire sulla luce, la cui altezza AZ = a, giusta le più esatte osservazioni, può valutarsi di 40. miglia italiane, condotta pel punto A, luogo dell'osservatore l'oriz-

Fig.ª 1.ª

zontale AH, è chiaro che se abbiansi tre punti luminosi L, M, N, il primo sul prolungamento dell'orizzontale, il secondo ad una data altezza; il terzo sul prolungamento della verticale AZ, il raggio lucido proveniente dal primo L dovrà passare maggior porzione di Atmosfera che gli altri due prima d'arrivar all'occhio in A; cosicchè sulla direzione LA incontra il massimo strato dell'atmosfera, e sulla direzione NA il minimo. Donde si vede che l'astro apparirà pallidissimo sull'orizzonte, o in vicinanza di esso, e molto più vivido verso lo zenit N.

Per calcolare le lunghezze di questi diversi tratti AH, AB, AZ, si osserverà rispetto alla prima; che AH è ordinata al circolo ZHEZ, il cui raggio $CZ = AC + AZ = r + a$; quindi si troverà $AH = \sqrt{a(2r+a)}$: si arriverebbe allo stesso risultato per mezzo del triangolo HAC la cui Ipotenusa $CH = CZ = r + a$, ed il cateto $CA = r$, dal che si ha $(r+a)^2 = r^2 + \overline{AH}^2$, donde risulta come prima

$AH = \sqrt{a(2r+a)} = 526,12$ miglia italiane; e per conseguenza più di 13 volte maggiore che AZ.

Rispetto al tratto obbliquo AB si osserverà che nel triangolo BAC si conoscono i lati $CA=r$; $CB=r+a$, e l'angolo BAC supplemento dell'angolo BAZ, il cui valore si misura per mezzo di un quadrante; quindi colle solite formole trigonometriche si ricaverà il valore di AB.

Dall'esposta teoria chiaramente risulta, che supposta pur anche l'atmosfera ugualmente densa in tutta l'estenzione sua, l'intensità del raggio I.A deve essere molto minore di quella di tutti gli altri raggi che si accostano alla direzione verticale. Questa però non è la sola cagione dell'indebolimento della luce: un altra circostanza notabilmente vi concorre, di cui non difficil cosa riesce il comprenderne l'influenza qualora si rifletta 1° Che la densità dell'atmosfera va scemando dalla superficie della terra ove essa è massima a ragione del peso dell'aria, e della sorprendente coppia di vapori crassi, e vessi-

colari. 2° che se si concepisca divisa l'atmosfera in un grandissimo numero di strati sottili concentrici, egualmente grossi, e ridotti alla medesima temperatura, la densità di ciascuno di essi potrà supporsi uguale in tutta la sua estenzione; ma essa anderà crescendo dalla sommità dell'atmosfera sino all'ultimo strato attiguo alla superficie terrestre ove sarà la massima.

Ciò posto supponiamo per maggior semplicità che l'atmosfera non sia divisa che in quattro strati uguali in grossezza. È chiaro che la verticale AZ rimarrà divisa in quattro parti uguali dai circoli che separano gli strati: l'orizzontale AH sarà bensì divisa in quattro parti, ma queste, come consta dalla Geometria, saranno disuguali con tal legge che dalla prima andranno crescendo sino all'ultima nA che sarà la massima, e tutta compresa nello strato più denso. Dal che si vede che il raggio I.A oltre al dover percorrere un tratto d'Atmosfera tredici volte maggiore di quello del rag-

gio verticale AN è costretto attraversar inoltre porzioni successivamente maggiori di quegli strati che sono i più densi. Per lo che l'intensità della luce del raggio orizzontale deve neccessariamente scemarsi pel concorso simultaneo delle due accennate cagioni. A misura poi che il raggio MB incidente nell'atmosfera si accosta alla direzione verticale NZ, il tratto BA, e le parti in cui resta diviso dagli accennati circoli separatori, s'accostano sempre più all'eguaglianza di AZ, e delle sue parti di divisione, e per conseguenza il grado di diminuzione s'accosterà a quello del raggio verticale AZ, che è il minimo.

Il Sig.r Bouguer appoggiato agli esposti principj, e a delicate osservazioni, trovò, che 1000 raggi paralelli, di cui egli suppone composto un fascetto lucido, e che tutti, distrutta l'atmosfera, perverrebbero al nostro occhio, tanti soltanto vi arriveranno quanti sono espressi nella seguente tavola

altezza angolare del corpo lucido	numero de' Raggi	Altezza &c.	Numero &c.	Altezza &c.	Numero &c.	Altezza &c.	Numero &c.
0.	5.	7.	2031.	20.	5474.	70.	8016.
1.	47.	8.	2423.	25.	6136.	80.	8098.
2.	192.	9.	2797.	30.	6613.	90.	8123.
3.	454.	10.	3149.	35.	6963.		
4.	802.	11.	3472.	40.	7237.		
5.	1201.	12.	3773.	50.	7624.		
6	1616.	15.	4551.	60.	7866.		

Il medesimo Autore ha dimostrato per mezzo di varj sperimenti che la luce diretta del Sole è presso a poco 300,000 volte più intensa che quella della Luna Piena alla distanza media dalla terra, e allo stesso grado di altezza che il Sole; e che la luce solare non è più sensibile all'occhio allorchè la densità sua è ridotta alla 1,000,000,000,000 parte di quella che di sua natura possede alla superficie della terra. Donde si vede che un corpo deve considerarsi opaco allorchè non trasmetta che

la 1,000,000,000,000 parte de' raggi solari che cadono sulla sua superficie. Veggasi Smith cours complet d'Optique Tom: premier: pag: 59. et seg:

Nota. Nella teoria ora esposta si è sempre supposto che i raggi LH, MB incidenti obbliquamente sulla superficie convessa del limite dell' atmosfera, continuassero il loro cammino rettilineo sino all'occhio dell'osservatore, il che non è assolutamente vero, come a suo luogo vedremo: ma l'errore che da questa supposizione risulta è si tenue, che meritamente può essere trascurato. Giova soltanto osservare, che l'effetto della rifrazione siccome tendente a piegar successivamente il raggio di luce, e a fargli percorrere un cammino curvilineo, concorre a render maggiore la perdita di luce in que' raggi, che sono più vicini all'orizzonte, siccome quelli che sono più soggetti alla forza rifrangente dell'atmosfera, e per conseguenza a caminar per un cammino curvilineo più esteso attraverso gli strati più densi.

Teorica delle Ombre e delle Penombre.

La mancanza totale, o la diminuzione della luce costituisce le tenebre, o l'ombra.

Il movimento rettilineo della luce, ed insieme l'indole, e la natura di molti corpi impenetrabili dalla luce, detti corpi opachi, danno origine necessariamente alle tenebre, ed alle ombre. Infatti se il moto della luce fosse indeterminatamente curvilineo, e se tutti i corpi fossero perfettamente diafani, allora la luce potrebbe slanciarsi per tutti i versi, e riempire di sua sostanza tutti gli spazi che circondano il corpo opaco, qualunque fosse la posizione di esso rispetto al corpo luminoso: effetto analogo risulterebbe nell'altra ipotesi de' corpi perfettamente diafani. Dunque l'opacità de' corpi, ed il moto rettilineo della luce sono le due sole cagioni delle tenebre, e delle ombre.

Diffatti propagandosi i raggi lucidi in linea retta, e l'opacità de' corpi essendo per quelli

un ostacolo, gl'intervalli che al di là del corpo, vale a dire alla parte opposta a quella del punto lucido, da cui partono i raggi, corrispondono alla direzione de' raggi impediti, resteranno privi di quella luce, quindi vi si formerà l'ombra, la quale, come è evidente, esisterà, e si moverà sempre contrariamente alla posizione, ed al moto del punto raggiante.

Dal che risulta 1°. Che l'ombra apparirà tanto più tetra, e carica, quanto più viva sarà la luce rischiarante gli oggetti vicini, a meno che la luce da essi riflessa non iminuisca in parte l'oscurità di essa. 2°. Quanti saranno i punti lucidi, tante ombre differenti si vedranno attorno al corpo opaco, e queste anderanno sempre più accostandosi, e riunendosi in una sola, a misura che i punti lucidi si trasporteranno dalla stessa parte del corpo opaco, e si avvicineranno fra loro per formare un solo punto raggiante.

Rappresenti ora GH (fig.ª 2) un piano orizzontale su cui sia piantato verticalmente

Fig. 2

uno stilo opaco PS, e dal punto raggiante A si concepiscano emanare i raggi lucidi Am, An.... ....AS, si vedrà senza fatica che tutti saranno intercetti tranne AS, il quale radendo il vertice del corpo, proseguirà il suo cammino rettilineo sino all'incontro del piano orizzontale in E. Tutti i punti compresi fra il piede P, ed il punto E saranno evidentemente privi di luce; e per conseguenza PE rappresenterà la lunghezza dell'ombra gettata dal corpo PS. Prescindo per ora da quella piccola inflessione che succede al raggio lucido AS.

Ciò posto sia PS = h altezza verticale del corpo opaco; PE = x lunghezza orizzontale dell'ombra; ang: PEA = a altezza angolare del punto lucido A rispetto alla retta orizzontale EP: Nel triangolo rettangolo EPS si avrà EP : PS :: 1 : tang PES, ossia $x : h :: 1 : \tan a$; quindi $x = \frac{h}{\tan a}$; ossia $x = h . \cot a$.

Dunque 1°. Se $a = 45°$, $\tan a = 1$, ed $x = h$; cioè se l'altezza angolare del punto lucido ugua-

gli un angolo semiretto, la lunghezza dell'ombra uguaglierà l'altezza del corpo opaco. Se dunque nel giorno 21 Marzo del corrente anno si misuri all'istante del mezzodì la lunghezza dell'ombra gettata dalla Torre del nostro Duomo, o di qualunque altro edifizio, si avrà con grandissima approssimazione l'altezza vera dei suddetti corpi, prescindendo dal tenue errore che può derivare dall'inflessione de' raggi che radono l'estremità della Torre, e della penombra di cui si parlerà fra poco.

Supposto in A' un altro punto lucido per cui PS getti un altr'ombra PE' $= x'$, e chiamata a' l'altezza angolare PE'A' si avrà come sopra $x' = \frac{h}{\text{tang}\,a'}$; ossia $x' = h.\ \cot a'$. Quindi $x : x' :: \frac{h}{\text{tang}\,a} : \frac{h}{\text{tang}\,a'}$, da cui risulta $x : x' :: \text{tang}\,a' : \text{tang}\,a$, cioè le lunghezze dell'ombra di uno stesso corpo sono in ragione inversa delle tangenti delle altezze angolari de' punti raggianti A, A'.

3°. Poichè scemando l'angolo a scema eziandio la sua tangente, perciò nell'equazione $x = \frac{h}{\text{tang}\,a}$

crescerà il valore di x al crescere di h, e al diminuire di a; quindi la lunghezza dell'ombra è in ragione composta diretta dell'altezza del corpo opaco, ed inversa dell'altezza angolare del punto lucido. Se fosse $a = 0$, vale a dire che il raggio AS fosse parallello all'orizzontale PE, si avrebbe $\tan a = 0$; quindi $x = \frac{h}{0} = \infty$, vale a dire infinita la lunghezza dell'ombra come è per se stesso evidente. Che se si avesse $a = 90°$, ossia che il raggio fosse verticale, e coincidesse colla direzione del corpo PS, allora $\tan a = \infty$; ed $x = \frac{h}{\infty} = 0$; quindi nulla sarebbe l'ombra, poichè, come è manifesto, tutta l'ombra si ristringerebbe nel solo piede P del corpo.

4.° Se nell'espressione $x = \frac{h}{\tan a}$ si sostituisca in luogo di $\tan a$ il suo valore $\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, si avrà $x = \frac{h \cos a}{\operatorname{sen} a}$; quindi $x : h :: \cos a : \operatorname{sen} a$. Donde si vede che la lunghezza dell'ombra stà alla altezza verticale del corpo, come il coseno dell'altezza angolare del punto lucido stà al suo seno.

Oltre l'ombra PE gettata sopra un piano

orizzontale dal corpo verticale PS, la quale da taluni si chiama ombra retta, si può considerar anche l'ombra versa CS gettata dalla lunghezza CB = h' di un corpo orizzontale sopra un piano verticale CP, che nella figura è rappresentato di profilo. Ora conviene osservare

1°. Che se un corpo lucido A produca le due ombre PE = x; CS = x'', i tre punti B, S, E, saranno necessariamente sulla stessa linea retta; quindi i triangoli simili BCS, SPE ci daranno CS : CB :: PS : PE; ma SP : PE :: tang a : $1 :: \frac{\text{sen}\,a}{\cos a} : 1 ::$ sen a : cos a; quindi CS : CB :: sen a : cos a; cioè l'ombra versa sta alla lunghezza del corpo opaco, come il seno dell'altezza angolare del punto lucido stà al suo coseno. Questa proporzione dà $x'' = \frac{h' \text{sen}\,a}{\cos a} = h' \tan a$.

2°. Se sen a = cos a donde risulta tang a = 1, e l'angolo $a = 45°$, si avrà $h' = x''$, ossia CS = CB: cioè qualora l'altezza angolare del punto lucido sia uguale a 45°: anche l'ombra versa uguaglierà, come la retta ( ) la lunghezza del

corpo opaco.

3°. Se nelle due espressioni $x = \frac{h}{\text{tang}\, a}$; $x'' = h' \text{tang}\, a$ relative all'ombra retta, ed alla versa, si ponga $h = h'$, uguali cioè le lunghezze dei due corpi opachi, moltiplicando allora le due equazioni fra loro si avrà $x x'' = h^2$; quindi $x : h :: h : x''$; donde si vede che se i due corpi sono uguali, l'altezza comune di essi è media geometrica proporzionale fra le sue ombre retta, e versa.

4°. Se, nella stessa ipotesi di $h = h'$ nelle due equazioni $x = \frac{h}{\text{tang}\, a}$; $x'' = h' \text{tang}\, a$ pongasi $\frac{\text{sen}\, a}{\cos a}$ in luogo di tang a, e si dispongano i termini in proporzione facendo sparire le frazioni si avrà $x : x'' :: \cos^2 a : \text{sen}^2 a$; dal che si raccoglie che quando i due corpi sono egualmente alti, l'ombra retta sta all'ombra versa in ragione duplicata del coseno al seno dell'altezza angolare del punto lucido A.

Delle Penombre

Sino ad ora non abbiamo considerato che

un sol punto raggiante, ed in conseguenza di tal supposizione abbiamo dimostrate le principali proprietà dell'ombra vera. Ma se in vece di un sol punto raggiante molti ne esistano, cosicchè ne risulti un corpo luminoso, o raggiante, allora le ombre presentano alcune proprietà, e modificazioni, che molto importa che sieno attentamente considerate.

Supponiamo adunque che tra A, ed A' siavi una serie di punti raggianti che insieme formino la retta luminosa AA', da' cui punti estremi A, A' partano pel vertice S del corpo verticale opaco PS i raggi ASE, A'SE' che incontrino il piano orizzontale GH in E, ed E'. Ognun vède, che nel tratto PE compreso fra il piède, ed il punto d'incontro del raggio derivante dal punto luminoso più elevato, non cadrà alcuno degli infiniti raggi che si slanciano dai punti lucidi della retta luminosa AA'; quindi PE sarà l'ombra vera del corpo PS. 2°. che nei punti compresi fra E, ed E' cadrà di mano

in mano maggior copia di luce quanto più si allontanano dal punto estremo E dell'ombra vera, generandosi in tal maniera da E verso E' un aumento graduato di luce, o una penombra EE'. 3°. Che al limite E' ed a tutti i punti da E' verso E possono arrivare raggi di luce provenienti da ciascun de' punti luminosi compresi fra A, ed A'; quindi nel punto E' cessa la penombra, ed incomincia la completa illuminazione. 4°. Siccome la penombra incomincia da E' verso E per la sottrazione di un sol raggio, poi di due, etc. sino al punto E ove cessan tutti, ed essendo d'altronde insensibile all'occhio l'efficacia di un sol raggio di luce, ognun vede, che inassegnabili fisicamente sono dall'occhio i veri limiti EE' della penombra. 5°. Se oltre i punti raggianti AA' che noi abbiamo supposto esistere nello stesso piano verticale che PS, e che formano la penombra EE' del corpo, solo rispetto al suo vertice S, s'immaginino altri punti luminosi fuori della stessa retta, risul-

teranno delle altre penombre non solo del vertice, ma di tutti i punti laterali eziandio del corpo, cosicchè l'ombra vera di esso sarà da tutte le parti circondata da una penombra soggetta ad una degradazione analoga a quella del vertice S risultante dalla retta luminosa AA'.

Quanto alla lunghezza della penombra EE', sia come sopra PS = h; ang: PEA = a, angolo formato dal raggio più ellevato coll'orizzonte; ang: PE'A' = a' angolo formato dall'altro raggio più obliquo all'orizzonte; ang: ESE' = c angolo formato al vertice S dall'incrocichiamento dei raggi estremi: Ora poichè l'angolo esterno PES = EE'S + E'SE, ossia $a = a' + c$, si ha $c = a - a'$. Inoltre abbiamo veduto (   ) che PE = $h.\cot a$; PE' = $h \cot a'$, dunque EE' = PE' − PE = $h \cot a' - h \cot a = h(\cot a' - \cot a) = h\left(\frac{\cos a'}{\operatorname{sen} a'} - \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}\right)$ $= h\left(\frac{\cos a' \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} a' \cos a}{\operatorname{sen} a' \operatorname{sen} a}\right) = \frac{h \operatorname{sen}(a-a')}{\operatorname{sen} a' \operatorname{sen} a}$; ma $a - a' = c$; dunque la lunghezza della penombra EE' = $\frac{h \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a' \operatorname{sen} a}$.

Osservando ora, che nel nostro caso gli an-

goli a, a' esprimenti l'altezza dei punti lucidi sull'orizzonte, non possono supporsi maggiori del retto, e che entro questo limite l'aumento dell'arco trae seco l'aumento del seno, ognun vede, che il valore della precedente formola sarà tanto più grande, quanto è minore l'angolo a e quanto è maggiore o l'altezza h del corpo opaco, o l'angolo c misura del diametro apparente AA' del corpo lucido; dunque la penombra sarà tanto più estesa, quanto più alto sarà il corpo opaco PS, quanto è più vasto, e vicino il corpo lucido AA', e quanto più vicini all'orizzonte sono i due estremi A,A' del medesimo.

De' Coni Ombrosi.

(Canovai §. 467

Fig.a 3

Rappresentino IKN, CVD (fig.a 3) i circoli massimi di due globi, il primo opaco, l'altro lucido, con le comuni tangenti CI, DN, e poichè il moto della luce è rettilineo, e CI, e DN cadono interamente fuori dei circoli, a contatto

però di essi, niun raggio che parta di là da C verso L sino in D potrà incontrare il globo opaco IKN, cosicchè la parte illuminante CVD, e l'illuminata IKN sono determinate dalle tangenti CI, DN. Condotta adunque l'indefinita GMH pei centri dei globi, e dal centro M del globo minore la ME paralella ad IC, MG dividerà in mezzo gli archi IKN, CVD, onde basterà esaminare le sole metà IK, CV. Condotti ora dai centri G, M i raggi ai punti di contatto delle tangenti, saranno essi paralelli a due a due, e risulterà il paralellogrammo IMEC, in cui l'angolo IME è = MEG.

Ciò posto sia la distanza dei centri $MG = \delta$; il raggio del globo lucido $GC = r$, dell'opaco, o tenebroso $MI = r'$; e l'angolo KMI che è misurato dal semiarco illuminato $KI = x$; si troverà $GE = GC - CE = GC - MI = r - r'$; e l'angolo CGV misurato dal semiarco illuminante $CV = 180^\circ - MEG - EMG = 180^\circ - IME - EMG = 180^\circ - (IME + EMG) = 180^\circ - IMG = 180^\circ - x$. Ora nel triangolo rettan-

golo MEG si ha GM : GE :: 1 : cos EGM, ossia $\delta : r-r' :: 1 : \cos(180^\circ - x)$; quindi $\delta = \frac{r-r'}{\cos(180^\circ - x)}$; ma $\cos(180^\circ - x)$ esprime il coseno del suplemento dell'arco x, il qual coseno, come consta dalla Trigonometria è sempre uguale con segno opposto a quello dell'arco x a cui appartiene, quindi $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$; sostituendo dunque si avrà $\delta = \frac{r-r'}{-\cos x}$, e $\cos x = \frac{r'-r}{\delta}$; e poichè in generale $\text{sen}\, x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, sostituendo si troverà

$$\text{sen}\, x = \sqrt{\left(1-\left(\frac{r'-r}{\delta}\right)^2\right)}$$

Dunque 1°. Se il globo opaco è più grande del globo lucido, o se $r' > r$, $\cos x$ sarà positivo; quindi $x =$ arc. IK sarà $< 90^\circ$; e $180^\circ - x =$ arc luminoso CV sarà $> 90^\circ$; cioè per illuminare in questo caso meno della metà dell'opaco vi vorrà più della metà del globo lucido, come si vede nella (fig.ª 4). 2°. Se i due globi hanno lo stesso raggio come nella (fig.ª 5) allora si ha $r = r'$; quindi $\cos x = \frac{0}{\delta} = 0$, onde $x =$ arc IK $= 90^\circ$; e $180^\circ - x =$ arc CV $= 90^\circ$: donde si vede che per illuminare la metà dell'opaco basterà la metà del lucido. 3°. Finalmente se

Fig.ª 5 – Fig.ª 4

il globo luminoso è maggiore dell'opaco (fig.ª 6) cioè se $r > r'$, $\cos x$ sarà negativo, e quindi $x =$ arc. $IK > 90°$, e $180° - x =$ arc. $CV < 90°$. cioè per illuminare più della metà dell'opaco basterà meno della metà del lucido.

Fig.ª 6

2°. Poichè $\cos x = \frac{r'-r}{\partial}$ è tanto più grande quanto la distanza dei centri $\partial = GM$ è più piccola, e reciprocamente, se scemi la distanza ∂, e sia $r' > r$, crescerà $\cos x$ positivo, quindi scemerà l'arco $x = IK$, e crescerà l'arco $180° - x = CV$ (fig.ª 4) cioè se il globo opaco è maggiore del lucido si richiederà una parte del globo lucido sempre più grande per illuminare una parte dell'opaco sempre più piccola, come è per se stesso evidente. Che se il globo opaco sia minore del globo lucido (fig.ª 6), ossia se $r' < r$, allora al diminuire di ∂ crescerà $\cos x$ negativo, crescerà l'arco $x = IK$, e scemerà l'arco $180° - x = CV$, ciò è una parte del globo lucido sempre più piccola basterà per illuminare una parte dell'opaco sempre più grande. Quando cresca la distanza GM, avverrà tut-

Fig.ª 4

Fig.ª 6

to l'opposto.

Fig.ª 3

3°. Condotti pei centri G, M i diametri AA', BB' (fig.ª 3) normali alla retta che congiunge i centri, risulteranno manifestamente i triangoli simili AGC, BMI, ed A'GD, B'MN, fra i quali AGC = A'GD; BMI = B'MN: dal che si vede, che l'angolo CGA = ang. IMB; quindi l'arco CA che misura il primo, contiene lo stesso numero di gradi che l'arco IB misurante l'altro angolo; lo stesso dicasi degli archi A'D, B'N. Ora la somma dei due archi AC, A'D esprime ciò che manca all'arco illuminante CVD per esser di 180°; e la somma dei due archi BI, B'N esprime l'eccesso dell'arco illuminato IKN sopra i 180°. Dunque l'arco misurante l'amplitudine della parte illuminante, è il complemento ai 360° dell'arco che misura l'ampiezza della parte illuminata. Per simil ragione si vedrà che l'arco oscuro IEN del globo opaco contiene tanti gradi, quanti ne contiene l'arco illuminante CVD del globo lucido.

4.° Dalla somiglianza dei triangoli rettangoli IMH, IMB ne risulta ang: MHI = IMB. Similmente si troverà ang: MHN = ang: NMB'; sommando le due equazioni si avrà ang: MHI + ang: MHN = ang: IMB + ang: NMB', ossia ang: IHN = arc: IB + arc: NB'. Dal che vuolsi conchiudere, che l'eccesso dell'arco illuminato sopra l'arco oscuro è uguale all'angolo formato dai raggi lucidi tangenti i proposti globi.

5.° Poichè quando $r' > r$ si ha x, ossia l'arco IK < 90° (fig.a 4), sarà l'arco IF > 90°, quindi l'angolo IMH > 90°; ed essendo retto l'angolo MIX, sarà IMH + MIX > 180°: dunque i raggi tangenziali CI, DN divergeranno, e l'ombra del globo opaco avrà la forma di un cono troncato inverso. Se $r' = r$ (fig.a 5) allora $x = 90°$; quindi anche arc: IF = 90°, e retto per conseguenza l'angolo IMH, come è pur retto l'angolo MIX; laonde le MH, IX saranno paralelle; e l'ombra avrà la forma di un cilindro. Finalmente se $r' < r$ (fig.a 6), l'arco x, ossia IK è > 90°; quin-

Fig.a 4

Fig.a 5

Fig.a 6

di arc: $IF < 90°$; e la somma dei due angoli $MIH + IMF < 180°$, e le rette MH, IH convergeranno, onde l'ombra avrà la forma di un cono.

6.° Poichè in quest'ultimo caso del cono ombroso tanto utile per le insigni applicazioni nella teoria delle Ecclissi, si hanno due triangoli simili GEM, GCH, ne risulta la proporzione $CE : EG :: HM : GM$, ossia $r' : r - r' :: HM : \partial$, si troverà la lunghezza del cono ombroso $HM = \frac{\partial r'}{r - r'}$.

Fig.a 3

Condotte nella (fig.a 3) le due tangenti aem, a'e'm' in guisa che i punti di contatto siano opposti rispetto alla linea GM che congiunge i centri de' globi, e se da un altro punto qualunque v dell'arco luminoso si tiri il raggio tangenziale vv', è chiaro 1.° Che niuno de' raggi lucidi che partono dall'arco compreso fra D, ed a' potrà penetrare nello spazio m'eH: 2.° Che il punto luminoso C può spander raggi in tutta la estensione del suddetto spazio: 3.° Che andando da C verso v ed a' un punto luminoso p: e:

v non può mandar raggi che in quella sola porzione m'e'v' che è compresa fra i due raggi tangenziali, rimanendo l'altra porzione v'e'H affatto priva de' raggi lanciati da v a motivo dell'interposizione del globo opaco. Donde si vede, che dal raggio tangenziale e'm' incomincia la diminuzione di luce, che va crescendo gradatamente sino all'altro raggio tangenziale BH; egli è dunque manifesto che lo spazio m'e'H sarà occupato dalla penombra; che sarà divisa dall'ombra vera HIMNH dal raggio tangenziale BH. Ognun vede inoltre, che attesa la insensibile diminuzione di luce che a poco a poco va facendosi nello spazio m'e'H malagevolmente si potranno distinguer dall'occhio i veri limiti e'm', BH che separano la penombra e dallo spazio di completa illuminazione, e dall'ombra vera.

Delle Immagini o Spettri luminosi

Se nel piano BC (figa 7) si formi un foro di

Fig. 7

figura qualunque, p: e: circolare, e che da un sol punto A partano raggi di luce per tutti i punti dell'apertura; i quali vadano poi ad incontrare un altro piano B'C' paralello al primo, si formerà sopra di esso una figura simile a quella del foro, ed essa sarà tanto maggiore, quanto più distante sarà il piano B'C' dal piano BC, e quanto più vicino al foro sarà il punto luminoso A.

Imperocchè diffondendo il punto A raggi lucidi per ogni verso, è chiaro che tanti di essi passeranno pel foro, quanti sono i punti di cui può concepirsi formato: quindi il punto luminoso A costituisce il vertice di una piramide luminosa, la cui base è il piano dell'apertura; ed i lati sono i raggi di luce, che radono i lati del foro. Essendo questi prolungāti sino all'altro piano B'C', diverranno essi più divergenti: la piramide acquisterà più d'estenzione, e la sezione di essa fatta dal piano B'C' paralello al piano del foro, sarà evidentemente simile, e maggiore al foro, e tanto

maggiore quanto maggiore sarà la distanza dei due piani paralelli. Che se il punto A si avvicini al foro rs, allora i raggi estremi Ar; As formeranno un angolo maggiore che prima: crescerà adunque la divergenza di essi, quindi a parità di cose la sezione di questa nuova piramide luminosa sul piano B'C' sarà maggiore dell'altra. La sola ispezione della figura rischiarirà bastantemente quanto finora si è detto.

Siccome ogni raggio di luce che parte da un punto luminoso è sempre omogeneo se non è soggetto a qualche alterazione si mantiene omogeneo alla sua sorgente, ognun vede, che ogni raggio di luce porta seco un'immagine del punto luminoso da cui deriva; e che per conseguenza nelle sezioni r's', h'l'm'n', d'e'f' tante saranno le immagini de' rispettivi punti lucidi A, A', A" quanti sono i punti delle corrispondenti sezioni rs, hlmn, def pei quali passano i raggi di luce. Il complesso di tutte queste im-

magini esistenti nelle indicate sezioni, chiamasi spettro di quel punto luminoso che propaga i raggi di luce. Ora poichè ciascun raggio non presenta; siccome sottilissimo, all'occhio, che un immagine debolissima, e quasi insensibile del punto luminoso, e trovandosi di più queste immagini tanto più fra loro disgiunte quanto è maggiore la divergenza dei raggi di luce, e quanto maggiore la distanza dei due piani BC, B'C', ognun vede, che in tale ipotesi lo spettro diverrà languidissimo, ed infine affatto insensibile all'occhio, quando per le accennate circostanze diventasse egli eccessivamente grande.

Se il punto A fosse ad enorme distanza dal foro rs, e che i due piani BC, B'C' fossero a mediocre distanza fra loro, allora i raggi estremi Ar, As, e i lati del cono lucido Arr', Ass' sono sensibilmente paralelli; quindi lo spettro r's' sarà simile, e sensibilmente uguale all'apertura rs. Poichè gli spettri e'd'f', h'l'm'n'..... sono simili ai rispettivi fori edf, hlmn, è chiaro, che si avrà

area $e'd'f'$: area edf :: $e'd^2$: ed^2 :: $A''d'^2$: $A''d^2$; ora essendo la densità della luce tanto minore, quanto maggiore è lo spazio che occupa, se si chiamino D, D' le densità della luce nel foro edf, e nel corrispondente spettro $e'd'f'$ si avrà D : D' :: $e'd'f'$: edf :: $A''d'^2$: $A''d^2$, e chiamata 1 la densità D della luce nel foro edf considerato anch'esso per unità di misura degli spettri a lui simili, si vedrà che la densità della luce negli spettri è in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal punto lucido A''.

Se il piano B'C' non fosse parallelo al piano del foro, ma obbliquamente rivolto ad esso, allora lo spettro avrà bensì tanti lati quanti ne esistono nel foro, giacchè i lati della piramide luminosa sono unicamente determinati da quelli dell'apertura, ma sarà dissimile dalla figura del foro, allungandosi, o restringendosi più per un verso, che per l'altro. Avvi però un caso in cui lo spettro può esser simile al foro sebbene B'C' non sia parallelo a BC, e ciò av-

viene quando B'C' forma una sezione alterna colla sezione dell'apertura. Ma qui non giova parlare di questo caso.

Abbiamo fin qui supposto che il punto raggiante sia unico, e che estesa sia la superficie del foro, consideriamo ora il caso opposto, quello cioè in cui molti siano i punti raggianti, ed inesteso il foro; cosicchè ridotto sia ad un sol punto geometrico. A tal uopo convien premettere alcune considerazioni, che agevoleranno l'intelligenza di questa importante teoria.

Fig.ª 8

Rappresenti CEMND (fig.ª 8) una sfera luminosa, di cui MDNE rappresenta il circolo massimo determinato dal piano della figura. Preso sullo stesso piano un punto qualunque A, e congiunto col centro C per mezzo della CA, si tirino le tangenti AD, AE al circolo massimo, di cui determineranno l'arco DNE, il quale sarà < 180° se la distanza dal punto A sarà finita. Fatta passare pei punti D, E un piano normale alla AC, esso produrrà sulla sfera una sezio-

ne circolare terminata da un circolo minore EFDG, i cui punti determineranno tutte le possibili tangenti Aa, Ab, Ad.... Af, Ag, che dal punto A si possono condurre alla suddetta sfera, e che formeranno evidentemente la superficie convessa di un cono retto, che ha per vertice A, per base il circolo EFDG, e per asse la retta AC.

Dalle quali cose risulta 1.° che da ciascun punto del segmento, o calotta sferica NEFDG può partire un raggio di luce diretto al dato punto A; e che tutti questi raggi formeranno un cono retto luminoso AEFDG. 2.° che nessuno de' punti dell'altro segmento sferico MDFEG può lanciar raggio di luce verso il punto A, e che per conseguenza il circolo minore EFDG che separa il segmento illuminante il punto A, dall'altro che non può illuminarlo, può chiamarsi circolo finitore dell' Illuminazione. 3.° che il circolo finitore è sempre normale alla retta condotta dal punto A al centro della sfera lucida. 4.° che se il punto A fosse ad infinita distanza dal globo

lucido, le tangenti estreme DA, EA diverrebbero sensibilmente parallele: il cono lucido prenderebbe la figura di un cilindro, e per conseguenza il circolo minore EFDA finitore dell'illuminazione s'accosterebbe sempre più al piano del circolo massimo normale all'asse AC. 5.° Che l'angolo DAE formato dalle due tangenti, o lati opposti del cono misura la grandezza apparente, o angolare sotto cui apparirebbe il diametro del circolo finitore della sfera lucida ad un osservatore posto in A. Se il globo lucido CEMD rappresenti il Sole, ed A un punto della superficie terrestre, l'osservazione ha fatto conoscere, che l'angolo DAE è = 32' prossimamente.

Quanto si è detto del punto A, si deve estendere colle opportune modificazioni a qualsiasi altro punto A', rispetto al quale il finitore dell'illuminazione sarà il circolo minore HK normale alla retta A'C congiungente il punto A' col centro C della sfera: il cono retto HA'K esprimerà il complesso dei raggi, che dai punti

del segmento sferico illuminante HDK possono di-
rigersi al punto A'.

Supponiamo ora che nel piano BH (fig.ª 9)
sia fatto un forellino infinitesimo, ed inesteso A,
per cui passino i raggi DA, CA, EA ...... lanciati
da tutti i punti del disco solare DFEG. Atteso il
moto rettilineo della luce, e la singolare proprie-
tà de' raggi luminosi di frammischiarsi senza
deviar cammino, s'incrocichieranno essi in A,
e continuando il loro cammino rettilineo, fatta
sempre astrazione dall'inflessione; incontreran-
no il piano B'H' sul quale dipingeranno un'
immagine, o spettro del sole. Ora per poco che
si rifletta a quanto accade in questo fenomeno,
si vedrà di leggieri.

Fig.ª 9

1º. Che a motivo dell'incrocichiamento de'
raggi lucidi nel forellino A, i punti dello spet-
tro e, d, che sono immagini parziali de' rispet-
tivi punti E, D, del disco solare, devono necessa-
riamente essere in posizione opposta a quella de'
punti da cui derivano i raggi. 2º. Che lo spettro

intiero ed è il complesso delle parziali immagini di tutti i punti del disco luminoso, e siccome attesa la piccolezza infinitesima del foro A ciascuna delle suddette immagini non è dipinta che da un sol raggio, chiaro è, che tutte saranno languide, e pallidissimo pur anche sarà lo spettro intiero de. 3°. che il forellino A in cui si incrocicchiano i raggi di luce, può considerarsi rispetto al piano B'H' come un punto luminoso capace a lanciar raggi soltanto in una data porzione di spazio, a differenza di un punto per se stesso luminoso, che diffonde raggi per ogni verso. 4°. Che essendo retto il cono luminoso DAE, se il cono opposto eAd non è tagliato in modo, che il piano segante B'H' sia normale all'asse comune CAc, lo spettro dfeg sarà una delle tre sezioni coniche; ellittica per esem: se il piano segante tagli i lati opposti del cono eAd come si è supposto nella costruzione della figura: Se il piano segante PQ è normale all'asse CAc' allora lo spettro e'c'd' sarà circolare. Se il

piano segante B'H'c' è verticale, lo spettro solare nel nostro clima sarà ellittico sempre, tranne il caso in cui il sole trovasi sull'orizzonte, perchè l'asse CAc diventa allora orizzontale, e perciò normale al piano verticale segante B'H'. Finalmente se il piano segante H'B' è orizzontale, anche in questo caso lo spettro sarà sempre ellittico, a meno che il centro C del Sole non corrisponda allo zenit dell'osservatore.
5°. Se la superficie dell'oggetto lucido rivolta al forellino A è paralella al piano segante H'B', allora qualunque sia la figura della superficie luminosa, si formeranno due piramidi simili, ed opposte in A; ed è evidente che lo spettro dipinto sul piano paralello B'H' sarà perfettamente simile alla superficie luminosa. 6°. Trasportando il piano segante B'H' paralellamente a se stesso a maggiori distanze dal punto A, lo spettro crescerà sempre simile a se stesso, ma diverrà sempre più languido, quanto sarà maggiore la superficie da esso occupata: imperocchè le parziali im-

magini, già deboli per se stesse, lasciano, aumentandosi l'area; e non la quantità de' raggi, lasciano, dissi, necessariamente molti tratti privi affatto di luce. Quindi (   ) le densità di luce in due spettri simili a diverse distanze dal punto A saranno in ragione inversa de' quadrati delle suddette distanze. 7.° Se si confronti lo spettro efdg collo spettro r's' (fig.ª 7), si vedrà che il primo è il complesso delle immagini di tutti i punti del corpo luminoso, e che l'altro non è che la ripetizione dell'immagine di un sol punto luminoso.

Fig.ª n.° 7

Molte altre ricerche si potrebbero fare intorno alla figura degli spettri risultanti da' corpi luminosi di diverse forme; ma non istimo util cosa l'intrattenermi sopra argomenti più curiosi, che utili. I casi da noi considerati quelli sono, che presentano le più interessanti applicazioni nell'Ottica, nell'Astronomia, e nella Gnomonica.

Passiamo ora a considerare il terzo caso

degli spettri luminosi, quello cioè in cui estesi sono e l'oggetto luminoso, ed il foro per cui passano i raggi di luce. Affine poi di procedere dalle cose più semplici alle più composte, suppongo che non vi siano che tre fori infinitesimi E, F, G (fig.a 10) fra loro separati a posizione arbitraria sul piano HH', e che da un globo luminoso ACB partano raggi di luce verso ciascun forellino. Ognun vede che risulteranno i tre coni lucidi AEB, AFB, AGB rispettivamente formati dai rispettivi raggi diretti ai punti E, F, G, nei quali punti accadrà l'incrocicchiamento dei raggi, e quindi la formazione di tre altri coni lucidi rispettivamente opposti ai tre primi. Ora se questi tre coni siano tagliati da un piano KK' paralello, e poco distante da HH' risulteranno i tre spettri luminosi bcd, b''c''d'', b'''c'''d''' separati fra loro dagli intervalli oscuri db'', d''b'''.

Fig.a 10

Ma se trasportisi il piano KK' paralellamente a se stesso sino alla posizione LL', allora i coni lucidi si allargheranno, e cominceranno

a tagliarsi, e a compenetrarsi verso N, N'; quindi gli spettri si sovrapporranno, o coincideranno in parte negli spazj $b^{iv}d'$, $b^{v}d^{iv}$; e quanto più lungi si trasporterà il piano LL' altrettanto maggiori diveranno gli spettri, e più estesi gli spazj di sovrapposizione. Dal che si raccoglie 1°. che ne' suddetti spazj di sovrapposizione men languida sarà la luce che nel resto dello spettro. 2°. Che a motivo dell'accennata sovrapposizione, o coincidenza degli spettri parziali $b'c'd'$, $b^{iv}c^{iv}d^{iv}$, $b^{v}c^{v}d^{v}$ risulterà un nuovo spettro, che per distinguerlo da' precedenti il chiamerò complesso, formato in parte da porzioni di spettri parziali, ed in parte dalle porzioni de' medesimi che si sono sovrapposte. 3°. Che il limite di questo spettro complesso, sarà un contorno curvilineo $b'm'n'm''n''d^{v}$.... formato dagli archi $b'm'n'$, $n'm''n''$, $n''m'''d^{v}$..... corrispondenti alle porzioni di ciascuno spettro non coincidenti con quelle degli altri. Quindi ossia che i tre fori E, F, G esistano sulla stessa linea retta, o sia che formino il vertice di un

triangolo qualunque, lo spettro complesso dipinto sul piano LL', avrà sempre una forma tondeggiante, e che tanto più si accosterà alla figura circolare, o ellittica, quanto più vicino saranno i fori E, F, G, e quanto più lontano da essi sarà il piano LL'.

4º se il globo luminoso ACB fosse ad infinita distanza, come lo è il sole dal piano HH', allora i raggi EC, CF, CG, che partono dal centro C, e che sono gli assi dei coni lucidi sarebbero paralelli; e quindi supposti i due piani paralelli HH', KK' normali ad uno de' suddetti assi, lo saranno sensibilmente anche per gli altri due; quindi gli spettri bcd, b''c''d''; b'''c'''d''' saranno circolari, e la distanza de' loro centri, determinati dall'incontro degli assi paralleli col piano, sarà sempre la stessa per quanto si allontani il piano LL' dal piano HH'. I soli spettri b'c'd', b^{iv}c^{iv}d^{iv}..... acquisteranno aumento di superficie attesa la divergenza dei lati del cono Fb^{iv}, Fd^{iv}, Fb', Fd', che formano un angolo b^{iv}Fd^{iv} = AFB = 32' grandezza apparente del disco solare ( ). Donde si ve-

de che secondo le varie distanze del piano KK'
da quello dei forellini, gli spettri circolari saran-
no da principio separati: indi crescendo si toc-
cheranno; si confonderanno in seguito per qual-
che parte, e finalmente appariranno non forma-
re che un solo spettro sensibilmente circolare.

Se infiniti, e tutti attigui fossero i forellini,
il foro acquisterebbe estensione, e forma finita.
In tal caso è manifesto che tanti sarebbero i
coni lucidi, quanti sono i punti nel suddetto fo-
ro, e quindi altrettanti coni opposti, i quali at-
teso la estrema vicinanza de' loro vertici, e la
divergenza dei loro raggi laterali, necessariamen-
te si compenetreranno; e per conseguenza in-
finiti pure saranno gli spettri dell'oggetto lumi-
noso, e questi più, o meno sovrapposti, o misti se-
condo la maggiore, o minore distanza dei ver-
tici dei coni luminosi. Risulta da ciò 1°. Che
se KK' poco disti dal foro, e mediocre sia la di-
vergenza bE:d, b"F d" dei raggi laterali, lo spet-
tro complesso rassomiglierà sensibilmente alla

figura del foro. 2° se KK' trovisi a gran distanza del foro; allora a motivo del frammischiamento de' coni luminosi, e della graduata sovraposizione degli spettri solari, terminati tutti, come si è veduto (   ) da linee curve, risulterà uno spettro complesso curvilineo approssimantesi più, o meno alla figura ellittica, o circolare. Tutto ciò suppone, che la figura del foro non siscosti eccessivamente da quella di un poligono regolare. Infatti se il foro fosse di figura rettangolare molto lunga, e strettissima; allora lo spettro complesso dipinto sopra un piano parallello al foro sarebbe di figura allungata, terminata da due gran lati sensibilmente paralelli, e rettilinei, e da due archi sensibilmente circolari corrispondenti ai due lati piccoli del foro rettangolare. 3°. Egli è inoltre agevole il comprendersi, perchè sotto i pergolati, o ne' viali coperti da folte piante veggonsi quà e là spettri ovali, o quasi circolari formati da' raggi solari che passano per gl'intervalli non occupati dalle foglie;

le quali talvolta si dispongono in modo, da formare piccoli fori non eccessivamente irregolari.

Ma quando trattasi di fori estesi, quella fra le loro figure che merita particolarmente attenzione è la circolare, giacchè gli spettri che da essi risultano, formano il soggetto d'importantà osservazioni Astronomiche, e Gnomoniche. A rischiarir adunque questo caso particolare suppongo, che ABC (fig.a 11) rappresenti il disco solare, ed mnp un foro circolare fatto nel piano orizzontale DE paralello all'altro piano FG; pel centro n del foro si faccia passare un piano verticale che passi pure pel centro C del sole, e che esteso infinitamente formi sui due piani DE, FG le due sezioni orizzontali mp, PI. Per evitare la confusione delle linee, non considero nel foro che tre soli punti, vale a dire il centro n, ed i due estremi m, p del diametro orizzontale mp. Risguardando ora questi punti come fori infinitesimi, e condotti per essi da tutti i punti del disco solare i raggi Bm, Cm, Am, ... Bn, Cn, An.... Bp, Cp, Ap....

Fig.a 11

risulteranno i coni retti lucidi BmA, BnA, BpA, ai quali corrisponderanno i coni opposti a'mb', a''nb'', a'''pb''': Questi tre coni, e tutti gli altri che hanno il loro vertice sul diametro orizzontale mp del foro, hanno evidentemente il loro triangolo per l'asse sul piano verticale di cui poco fa abbiamo parlato, e poichè i suddetti coni sono obbliquamente tagliati da amendue i lati dal piano orizzontale FG, è chiaro, che dalle loro sezioni risulteranno altrettanti spettri ellittici a'e'b'a, a''d'b''d, a'''f'b'''f, i cui assi maggiori si troveranno tutti a perfetta coincidenza sulla retta orizzontale PI. Lo spettro a''d'b''d risultante da que' soli raggi che passano pel centro n del foro, chiamasi *spettro centrale*.

Ora si vede 1.° Che gli assi di tutti i coni lucidi che hanno per base il disco solare, e per vertice uno de' punti del foro, sono i raggi lucidi cm, cn, cp..... che dal centro c del disco si diriggono ad un dato punto del foro: e poichè i coni opposti a'mb'..... conservano gli stessi assi, prolungati

Cmc'', Cnc', Cpc'''; i punti c'', c', c''' saranno ne' rispettivi spettri le immagini del centro C del disco solare. Guardiamoci bene dal confondere i suddetti punti co' centri degli spettri ellittici: 2º Che ciascuno spettro rappresenta l'immagine, o la pittura allungata del disco solare. 3º Che cadendo una parte di uno spettro sopra quella di un altro ne risulterà uno spettro complesso a'e'd'f'b'''fde, il quale comprende tutti gli spettri dipinti dai coni lucidi, che hanno per vertice i punti del diametro mnp del foro. 4º Tutti gli altri spettri corrispondenti ai diversi punti del foro circolare cingeranno a destra, e a sinistra il summentovato spettro complesso, dai quali verrà lateralmente dilatato. A motivo dell'accennata sovrapposizione degli spettri, in un sol punto del piano FG cadranno raggi provenienti da diversi punti del disco solare; quindi ne deriverà una confusione d'immagini parziali, e lo spettro complesso non potrà rappresentare la vera immagine del disco solare. 5º Lo spazio curvi-

lineo $a'''b'd'd$ compreso fra gli archi ellittici $d'b'd$, $d'a'''d$ appartenenti agli spettri estremi $a'd'b'd$, $b'''d'a'''d$, siccome quello in cui cadono porzioni determinate di tutti i possibili spettri; sarà manifestamen- il più illuminato, ed incomincerà ad impallidir- si dagli accennati archi ellittici sino e l'intensità della luce incomincerà a diminu- irsi insensibilmente dagli accennati archi el- littici sino alle estremità a', b''' dello spettro com- plesso, ove sì tenue sarà la luce, che l'occhio non potrà distinguere precisamente il limite che separa lo spettro dallo spazio oscuro. Egual- mente difficile saranno a riconoscersi i punti a''', b', nei quali incomincia l'insensibile, e gra- duata diminuzione di luce. 6°. Poichè infinita è la distanza del Sole dalla Terra, è chiaro, che i raggi che partono da un punto del disco p. e. A, e passano per tutti i punti di un foro avente pochi pollici, o poche linee di diametro sono sensibilmente paralelli, ed essendo eziandio pa- ralelli i due piani DE, FG, si avrà $mn = a'a''$,

ed $np = b'b'''$. Se dunque dall'asse maggiore $a'b'''$ dello spettro complesso si tolgano alle estremità le parti $a'a''$, $b''b'''$ uguali ciascuna al raggio del foro mnp, si avranno i punti a'' b'' ai quali estendendosi lo spettro centrale $a''d'b''d$. Ma la difficoltà che incontrasi nel determinare gli estremi a', b''' dell'asse maggiore dello spettro complesso (   ) rende neccessariamente incerti anche i limiti a'', b'' dello spettro centrale.

Quando però siensi determinati con quella esatezza, che si può maggiore, gli estremi a'', b'' dello spettro centrale, facil cosa sarà il determinare l'altezza angolare del centro solare C sopra il piano FG. a tal uopo osservisi 1°. Che l'angolo cercato è neccessariamente formato da quel raggio solare, che partendo dal centro solare C passa pel centro n del foro, ed incontra in c' la retta orizzontale C'P' che è la sezione del piano orizzontale FG col piano verticale steso pel centro del foro, e del Sole; quindi l'altezza angolare cercata dipende dall'angolo P'c'n.

2°. Che il raggio lucido Cnc' forma l'asse del cono centrale, e divide conseguentemente per metà l'angolo $a''nb''$ formato dai lati opposti del cono. Ora essendo $a''nb'' = 32'$ (   ) sarà $a''nc' = c'nb'' = 16'$.

3°. Misurato il Gnomone, o distanza normale nP fra il centro n, ed il piano FG, la qual retta, come ognun vede, esiste sul piano verticale che passa per n, e per C, e misura inoltre le distanze Pa'', Pb'' dal piede P del gnomone, ed i punti estremi dello spettro centrale, si avranno due triangoli rettangoli nPa'', nPb'' nei quali si conoscono il lato comune nP, ed i rispettivi lati Pa''; Pb''; quindi con facil calcolo si determineranno gli angoli Pna'', Pnb'', il primo de' quali è complemento dell'angolo $Pa''n$ altezza apparente del bordo superiore A del disco solare; e l'altro è il complemento dell'angolo $Pb''n$ altezza apparente del bordo inferiore B del disco solare. La differenza de' sopradetti angoli Pna'', Pnb'' è l'angolo $a''nb'' = 32'$. Dunque se all'angolo Pna'' si aggiunga l'angolo $a''nc' = 16'$

risulterà un nuovo triangolo rettangolo nPc', in cui si conosce nP, e l'angolo Pnc': si conoscerà adunque anche l'angolo Pc'n altezza angolare cercata del centro solare. Colla stessa facilità si determinerà la distanza Pc' fra il piede dello stile, e l'immagine c' del centro solare dipinta nello spettro centrale.

Della Camera Oscura.

I principj superiormente dimostrati porgono facile spiegazione dei fenomeni, che si osservano in quel semplicissimo, e tanto noto apparato che appellasi camera oscura e da taluni camera ottica. Consiste essa in un foro circolare mcn (fig.a 12) fatto nel lato di una cassettina, o nell'imposta di una finestra di una stanza resa da ogni parte perfettamente oscura, e che presenti al foro un piano parallello HK: Se un oggetto esterno ABE presenti al foro la sua superficie vivamente illuminata o dai raggi del sole, o in qualsiasi altra ma-

Fig.a 12

niera, si formeranno subito le solite piramidi luminose AmEB, AcEB, AnEB........, ed altrettante piramidi opposte si formeranno entro la stanza, le quali essendo tagliate dal piano opposto, e parallello HK, risulteranno tanti spettri bae, b'a'e', b''a''e''..... quante sono le piramidi luminose.

Donde si vede 1.° Che ogni spettro è in posizione opposta a quella dell'oggetto BAE.: 2.° Che gli spettri estremi che racchiudono entro di se tutti gli altri spettri, sono bae, b''a''e''. 3.° Che la posizione b''a e'' dello spettro complesso sarà la più vivida, siccome quella in cui si sovrappongono porzioni determinate di tutti gli altri spettri: 4.° Che oltre gli accennati limiti b''e'', ed a l'intensità della luce andrà diminuendosi gradatamente sino ai limiti estremi be, ed a''; in cui la luce sarà insensibile. 5.° Che siccome tutti i raggi che partono dal punto A dell'oggetto, e passano pel foro, cadono in punti diversi a, a', a'' del piano HK, nei quali cadono

pure raggi provenienti da altri punti dell'oggetto, deve nascere tal confusione d'immagini, che lo spettro complesso bb''a''e''e ch'è una pittura inesatta, o piuttosto un informe abbozzo dell'oggetto esteriore BAF. 6.º Aumentandosi l'ampiezza del foro circolare crescerà bensì il numero delle piramidi luminose, e degli spettri ad asse corrispondenti; ma gli spettri estremi bae, b''a''e'' si scosteranno in modo, che la base dell'uno cadrà sul vertice dell'altro spettro; quindi lo spettro complesso bb''a''e''e apparirà confusissimo, e stravagantemente sfigurato. Deesi inoltre osservare, che in tal caso copia maggiore di luce straniera entrerà pel foro, la quale o lanciandosi direttamente nello spettro complesso, o pervenendovi dopo varie riflessioni contro i muri laterali della stanza, renderà ancor più smunta, e confusa l'immagine per se stessa informe dello spettro complesso. Dal che si vede, che una grande apertura, qual è per esem: una finestra, non presenta

all'occhio neppur confusamente, le immagini, o spettri degli oggetti esterni benchè ottimamente disposti, e fortemente illuminati.

Dalle cose fin qui esposte, chiaramente rilevasi, che nella camera oscura non si può avere precisione dello spettro, o dell'immagine dell'oggetto senza notabile diminuzione dell'area del foro, nel qual caso l'immagine diventa smanta, e quasi invisibile, nè può divenir vivida senza l'ingrandimento del foro, ed allora lo spettro è mal terminato, e confuso. Dal che vuolsi conchiudere, che questo apparato è necessariamente diffettoso a meno che non si collochi nel foco una lente convessa, la quale se non in tutto, in gran parte almeno corregga gli accennati diffetti. Ma di tal correzione si parlerà più a lungo nelle lezioni di Diottrica.

Poichè la figura dell'occhio rassomiglia in qualche cosa a quella della camera oscura, non sarà inutil cosa l'accenñar qui brevemente alcune cose intorno alle immagini che

vi si pingono, riservandomi lo svolgimento di questa importante materia a luogo più opportuno.

Dietro la cornea lucida CFD (figª 13) trovasi a poca distanza un'apertura circolare detta la pupilla, il cui diametro è mn, e c ne è il centro. Segue di poi il cristallino ebtv, il quale separa l'umor acqueo compreso nello spazio CFDntbemC, dall'umor vitreo che riempie tutto l'interno dell'occhio, ed estendendosi perviene sino alla retina; o espansione del nervo ottico LrqaP. Ciò posto se nell'occhio non vi fosse che la sola pupilla mcn, e la retina ad essa opposta I.qP, questa macchinetta andrebbe soggetta agli stessi diffetti che la camera oscura; ma l'infinita sapienza di Dio e per l'introduzione nell'occhio degli accennati umori, e per i raggi di curvatura della cornea, e della superficie del cristallino, e per le dimensioni delle diverse parti dell'occhio, e finalmente per la diversa forza, e per una

Fig.ª n.º 13

maravigliosa armonia de' raggi di curvatura, di distanze, di forze rifrangenti, ha obbligati tutti i raggi Rm, Rc, Rn...... Gm, Gc, Gn...... Am, Ac, An...... che da ciascun punto luminoso R, G, A...... entrano divergenti nell'occhio a cangiar direzione a poco a poco, e a passare dalla natural loro divergenza a converger tutti, e a riunirsi tutti rispettivamente su' punti r, g, a della retina, ove per la riunione di molti di essi si dipingeranno immagini distinte di ciascun punto luminoso, e risulterà quindi un esatta pittura dell'oggetto esteriore ABE.

Dal che si raccoglie 1°. Che le immagini degli oggetti dipingonsi al rovescio sulla retina: nè per altro noi giudicheremo diritti gli originali di queste pitture, se non perchè avvertiti ne siamo dal tatto, il quale dai primi giorni del viver nostro continuamente ci ha ammaestrati a riferire le immagini parziali r, g, a...... a ciascuna delle parti vere R, G, A dell'oggetto sulla direzione delle rette rc, gc, ac che

sono gli assi dei coni lucidi ert; egt; eat formati entro l'umor vitreo dai raggi convergenti. 2.° Che quanto sarà maggiore l'angolo rca formato dagli assi de' coni estremi, altrettanto maggiore sarà l'estensione rga dell'immagine sulla retina, e reciprocamente. 3.° che essendo, come si vedrà in Diottrica, i suddetti assi estremi rc, ac paralelli rispettivamente agli assi Rc, Ac de' coni lucidi esteriori, ed opposti, l'angolo rca sarà = ang: RcA formato dall'asse de' suddetti coni esteriori: siffatto angolo appellasi angolo ottico, o grandezza apparente dell'oggetto AGR. 4.° Che avvicinandosi, e allontanandosi l'oggetto AR, cresce, o scema l'angolo ottico AcR = acr; quindi l'immagine acquisterà maggiore, o minor estensione. 5.° Che se o per malattia dell'occhio, o per troppo avvicinamento, o anche per eccessiva distanza dell'oggetto dall'occhio i vertici r, g, a non cadono sulla retina, ma avanti, o dietro di essa, l'area della retina, taglierà in amendue i casi

i coni lucidi, e le immagini dei punti dell'oggetto esterno non saranno più rappresentati da un sol punto come nella prima ipotesi, ma saranno sparsi sopra i piani delle sezioni, le quali cadendo, come nella camera oscura, le une parallelle alle altre, produrranno un immagine confusa, e mal terminata dell'oggetto esterno. La sperienza, e l'osservazione hanno dimostrato, che in un occhio sano, ben costrutto, e non armato di lenti, la visione distinta, ossia la pittura esatta dell'immagine sulla retina cessa comunemente allorchè l'oggetto AR è lontano dall'occhio meno di 6. pollici parigini, e più di 30. pollici circa.

Giova inoltre osservare che i raggi di luce, che partono dall'oggetto luminoso devono entrare nell'occhio con tal grado di divergenza, che corrisponda a quella forza degli umori dell'occhio per la quale i raggi diventano convergenti in un sol punto della retina. Donde si vede, che se in un occhio ben conformato entrassero raggi paralelli, e molto più se fossero convergenti verreb-

bero riuniti troppo presto, e l'immagine dell'oggetto non si distinguerebbe sulla retina, ma avanti di esso, quindi la visione sarebbe confusa.

Catottrica
Nozioni Preliminari

La Catottrica è quella parte della teoria della luce, che indaga gli effetti, ed i fenomeni di questo fluido quando è riflesso dai corpi.

MIN rappresenta una superficie qualunque di un corpo levigato, e suppongasi che un raggio di luce AI (fig.ª 14) urti contro il punto I della superficie, condotta per esso la tangente indefinita CID, e la normale IP, la sperienza, e l'osservazione hanno fatto conoscere 1.° Che il raggio di luce lascia la direzione primitiva AI, e ne prende una nuova IB, allontanandosi dalla tangente CD; 2.° Che l'angolo AIP detto d'incidenza è uguale all'angolo di riflessione PIB, quindi il complemento d'incidenza AIC = BID complemento di riflessione.

Fig.ª 14

Talvolta si fa uso de' complementi d'incidenza, e di riflessione in luogo de' veri angoli d'incidenza, e di riflessione. 3.º Che la normale, o catetо d'incidenza giace tra il raggio incidente, ed il riflesso, e divide per metà l'angolo da essi formato. 4.º Che l'andamento di un attomo di luce riflesso è opposto a quello dello stesso attomo quando era incidente, rispetto alla tangente, o piano CID. 5.º Che il raggio incidente AI, il riflesso IB, e la normale IP condotta pel punto d'incidenza esistono sempre sopra uno stesso piano.

E siccome nell'urto de' corpi elastici contro corpi elastici, o perfettamente duri osservansi fenomeni del tutto simili ai sovraccennati, alcuni Fisici hanno conchiuso, esser unica la cagione fisica e la riflessione dei corpi elastici, e quella della luce; l'indole cioè della forza elastica, e l'urto delle molecole a reciproco contatto. Ma se riflettasi coll'immortale Newton che le particelle della luce sono maravigliosamente tenui, e che i corpi della natura, quelli pure che sem-

brano più compatti, e più lisci, appariscono tutti sotto il microscopio ripieni di pori, e sfregiati da infiniti solchi prodottivi dalle polveri dello smariglio, del tripoli, e dello stagno abbruciato di cui si fa uso nel polimento di essi, si vedrà facilmente, che la riflessione della luce non potrebbe mai essere sì regolare ne' corpi lisci, qual per altro si osserva„ Manet igitur continua il grande Newton, quæstio illa nondum plane expedita; qui fiat ut vitrum pulveribus adradentibus expolitum; tamen lumen tam ad certam normam reflectat, quam revera facit. Atque hæc quidem quæstio non videtur aliter expediri posse, quam si dicamus radii cujusvis reflexionem effici, non utique ab uno corporis reflectentis puncto, sed vi aliqua per totum corporis superficiem æqualiter diffusa; qua nimirum id in radium ita agat, ut tamen illum non contingat immediate. Nam corporum partes, interjecto licet aliquo intervallo, agere tamen in radios luminis; id

vero deinceps ostendetur.

Jam autem, si luminis reflexionis causa, non impactioni radiorum in solidas corporum partes, sed alii alicui rei tribuenda est; erit porro illud exinde verisimillimum, qui radii impingant se in solidas corporum partes, utique non reflecti eos, sed restingui intra ipsa corpora, et intercidere penitus. Alio-qui enim duo nobis essent fingenda reflexionis genera. Et vero, si reflecterentur radii, quotquot se in interiores aquae, vel cristalli pellucidae particulas impingant, forent sane corpora ista non pellucida plane, sed colore nubilo, ac eluto.

Porro, quo corpora videantur nigra, necesse est ut permulti radii intercipiantur, restinguantur, et intra ipsa intercidant: veri autem non videtur simile, radiorum ullos restingui, et intercidere posse, nisi qui in ipsas corporum partes sese impingant."

In due classi distinguer si debbono i corpi opachi: gli uni hanno le superficie inegua-

li, e mal pulite, come gli alberi, le muraglie, i monti...... gli altri le hanno levigate, ed uguali come i cristalli, ed i metalli bruniti...... e questi diconsi perciò corpi specolari. I primi riflettendo i raggi ricevuti da un oggetto luminoso, o illuminato li dividono, e gli sparpagliano in tutte le direzioni, onde guastate, e disperse dalla riflessione irregolare le immagini degli oggetti, giunge all'occhio la sola immagine del corpo opaco. All'incontro i secondi respingendo quei raggi con l'ordine, e colla mescolanza stessa che ebbero nel partir dall'oggetto, tranne il cambiamento di divergenza che ha luogo in alcuni specchj, come fra poco verrà dimostrato, non solo dipingono nell'occhio l'immagine di se stessi, ma conservano anche alle immagini degli altri oggetti la loro essenza, inviandole all'occhio ora colle dimensioni naturali, come fanno gli specchi piani, ora con qualche aumento, o diminuzione, come succede negli specchi sferici concavi, o convessi, ed ora con

bizzarre, ma sempre uniformi, e sempre ordinate trasformazioni, il che accade negli specchj conici, cilindrici etc. La teoria della luce riflessa non ha luogo che nella seconda classe de' corpi opachi.

Degli Specchi Piani

Rappresenti MN (fig.ª 15) il profilo di uno specchio piano, e sia A un punto luminoso che lanci contro lo specchio i raggi Ac, Ac', Ac''. Questi verranno riflessi (   ) sulle direzioni cn, c'n', c''n'', e formeranno gli angoli complementarj d'incidenza AcP, Ac'P, Ac''P rispettivamente uguali agli angoli complementarj di riflessione Mcn, Mc'n', Mc''n''. Quindi se i raggi incidenti Ac, Ac', Ac'' suppongonsi indefinitamente prolungati in m, m', m'', si avrà ang. Mcm = AcP = Mcn; ang. Mc'm' = Ac'P = Mc'n'; ang. Mc''m'' = Ac''P = Mc''n''; quindi i raggi riflessi cn, c'n', c''n'' formano colla retta MN i medesimi angoli che nei punti d'incidenza c, c', c'' formerebbero i raggi incidenti Ac, Ac', Ac'' se fossero prolungati; e

Fig.ª 15

per conseguenza la riflessione de' raggi prodotta da uno specchio piano non altera punto il grado di divergenza naturale che hanno fra loro i raggi incidenti. Ora poichè tutti i raggi incidenti Ac, Ac', Ac'' partono da un sol punto luminoso, chiaro è, che se si prolungheranno i raggi riflessi in senso opposto alla loro direzione, dovranno concorrer tutti in un sol punto A', formando in esso gli angoli di divergenza c A'c'; c'A'c'' rispettivamente uguali agli angoli di divergenza cAc', c'Ac''. Donde si vede, che rispetto all'occhio n n'n'', la visione, o la formazione dell'immagine a sulla retina r a r' succederà nello stesso modo sia che la luce partendo da A, e riflettendosi contro lo specchio entri nella pupilla n n'', o sia che essa direttamente vi pervenga dal punto ideale A'. In amendue i casi, essendo noi avvezzi a riferir le immagini degli oggetti, e quindi gli oggetti stessi sulle direzioni degli assi dei coni luminosi ( ), giudicheremo che il punto luminoso esista in uno dei punti

dell'asse a A', per esem: in A', e non già in A. Così l'occhio n n'n'' che a motivo del corpo opaco interposto T non potrebbe vedere direttamente il punto luminoso A, lo vedrà per riflessione in A'.

Cerchiamo ora la posizione del punto ideale di concorso A' rispetto alla superficie piana MN. A tal fine congiungo i punti A, A' colla retta AA' segante lo specchio in P, ed osservo, che ang: Ac''P = Mc''n'' = Pc''A'; quindi i supplementi Ac''M = A'c''M; similmente ang: Ac'P = A'c'P = Mc'n; quindi i due triangoli c'c''A; c'c''A', siccome aventi angoli uguali, ed un lato comune c'c'' saranno evidentemente uguali, e però C''A = c''A' (*). Segue da ciò, che uguali pur anche sono

---

(*) Nota. Abbassata da A la normale indefinita APA', è chiaro che il raggio riflesso c''n'' prolungato taglierà in A' la suddetta normale in modo, che sia A'P = AP, poichè ang. Ac''P = A'c''P, il lato Pc'' è comune, e retti gli angoli in P; quindi c''A = c''A', e PA = PA'. Nello stesso modo si dimostrerà che c'A = c'A', e che per conseguen-

i triangoli $Ac''P$, $A'c''P$, poichè in essi il lato $c''P$ è comune, il lato $c''A = c''A'$; e l'angolo $Ac''P = A'c''P$; dunque $PA = PA'$, e l'angolo $c''PA = c''PA'$; quindi la retta AA' è normale sopra MN, ed è divisa per metà in P dallo specchio.

Se dunque sia data la posizione del punto luminoso A, e della pupilla $n\,n'n''$ rispetto allo specchio MN, si potranno determinare facilmente sopra di esso i punti c, c', c'' ne' quali urtando i raggi lanciciti da A, vengono riflessi in modo, che si dirigeranno ai dati punti n, n', n'' dell'occhio (*).

---

za anche il raggio riflesso $c'n'$ concorre in A', e così di tutti gli altri.

(*) Nota. Nella data posizione dell'occhio $n\,n'n''$, e del punto luminoso A, è chiaro, che fra tutti i raggi emananti da A, e riflessi dallo specchio, i soli compresi fra i raggi Ac, Ac'' possono entrare nell'occhio $n\,n''$ per dipingervi l'immagine a del punto luminoso. Questi raggi adunque possono chiamarsi raggi efficaci per la visione, o semplicemente raggi efficaci.

A tal fine si abbassarà dal punto luminoso A una normale indefinita AA' allo specchio MN, e presa la porzione PA' = PA, dal punto A' si tireranno ai punti n, n'; n'' le rette A'n, A'n', A'n'', che taglieranno lo specchio in c, c', c'' punti cercati di riflessione. Infatti se dal punto luminoso A suppongansi lanciati ai detti punti i raggi Ac, Ac', Ac'', risulteranno i triangoli uguali A'c''P = Ac''P; quindi ang: A'c''P = Ac''P; ma A'c''P = Mc''n''; dunque ang: Ac''P = Mc''n'', donde si vede che il raggio incidente Ac'' dopo l'urto in c'' si rifletterà secondo la direzione c''n'', ossia A'c''n'', poichè questa sola direzione dà l'angolo d'incidenza uguale all'angolo di riflessione. Lo stesso dicasi degli altri raggi Ac', Ac, rispetto ai punti d'incidenza c', c...

Che se l'oggetto luminoso è esteso quale per esem: è ABC (fig.ª 16), e sia data la posizione di esso, e quella dell'occhio hiK rispetto allo specchio piano MN, si potranno determinare in una maniera analoga alla precedente sullo specchio i punti di riflessione m, n, p...... r, s, t....

Fig.ª 16

.... e, f, g...... de' raggi efficaci provenienti dai punti A, B, C dell'oggetto luminoso. Ed ecco come si dovrà procedere. Abbassate dai punti AA', BB', CC', che lo incontrino nei punti P, Q, R, e presa PA' = PA; QB' = QB; RC' = RC, indi condotte da A', B', C' ai punti h, i, k dell'occhio le rette A'h, A'i, A'k.... B'h, B'i, B'k...... C'h, C'i, C'k,...... queste taglieranno lo specchio nei punti m, n, p........r, s, t...... e, f, g. ai quali condotte da A, B, C le rette...... Am, An, Ap...... Br, Bs, Bt..... Ce, Cf, Cg, esprimeranno esse i raggi efficaci provenienti rispettivamente dai varj punti A, B, C dell'oggetto luminoso. Ognun vede che nell'occhio hik si formerà l'immagine cba dell'oggetto luminoso come se esistesse in A'B'C', e che per conseguenza l'occhio per mezzo della riflessione potrà vedere l'intero oggetto ABC, ancorchè direttamente non potesse farlo a motivo di un corpo opaco frapposto T.

Si vede inoltre che l'immagine A'B'C' è simile ed uguale all'oggetto ABC, poichè conser—

vandosi nella riflessione la naturale divergenza de' raggi di ciascun cono lucido, l'angolo ottico f i n formato in i dagli assi de' coni estremi provenienti dai punti C', A' dell'immagine, uguaglia l'angolo ottico f i' n che farebbero in i' gli assi A i', C i' de' coni lucidi estremi, se tolto lo specchio potessero penetrare nell'occhio h i' k.

Poichè i punti corrispondenti dell'immagine A'B'C', e dell'oggetto ABC sono similmente disposti rispetto allo specchio MN, vale a dire due a due egualmente distanti da MN, ognun vede, che se prolunghinsi indefinitamente l'oggetto AC, e l'immagine A'C' concorreranno in un punto qualunque N dello specchio, e la linea MN dividerà per metà l'angolo formato dall'oggetto colla sua immagine. Quindi l'angolo formato dall'oggetto colla sua immagine è sempre il doppio dell'angolo che uno di essi forma collo specchio.

Se dunque lo specchio MN (fig.a 17) sia orizzontale, e verticale l'oggetto CA, l'angolo

Fig.a 17

CPM sarà retto; quindi l'angolo CPC' formato dall'oggetto coll'immagine sua sarà uguale a due retti, vale a dire che l'immagine sarà pur essa verticale, risultato conforme a quello che si ottiene per mezzo della costruzione grafica de' punti di riflessione f, n, (   ). In tale ipotesi l'occhio hik adunque vedrà direttamente sì l'oggetto CA, che la sua immagine C'A' in posizione verticale.

Fig.ª 18

Se l'oggetto CA (fig.ª 18) è verticale, e lo specchio MN formi coll'orizzonte un angolo NZC' di 45°, anche l'angolo CZN formato dall'oggetto collo specchio sarà di 45°; quindi l'angolo CZC' formato dall'oggetto colla sua immagine C'A' sarà di 90°; dunque l'immagine A'C' sarà in tal caso orizzontale. Infatti i punti A', C' dell'immagine esistendo sulle normali APA', CRC' (   ) ad uguali distanze dello specchio MN che i punti corrispondenti A, C dell'oggetto, ed essendo per ipotesi CZN = 45°, i triangoli rettangoli uguali AZP, ZPA' danno

ang: AZP = 45° = ang: PZA'; dunque l'angolo AZA' = AZP + A'ZP = 90°. Dal che si vede, che l'occhio nella posizione hik può vedere direttamente la parte anteriore dell'oggetto verticale AC, e per riflessione la posteriore dello stesso rappresentata dall'immagine orizzontale A'C'.

Finalmente se lo specchio MN (fig.ª 19), e l'oggetto AC sono paralleli frà loro, l'angolo da essi formato sarà nullo; quindi nullo eziandio sarà l'angolo formato dall'oggetto CA colla sua immagine A'C', la quale per conseguenza sarà parallela all'oggetto, il che è conforme alla determinazione grafica dell'immagine C'A'( ). L'occhio nella posizione hik vedrà l'immagine C'A' per mezzo de' raggi riflessi fi, ni provenienti dagli estremi C, A dell'oggetto luminoso.

Fig.ª 19

Se da un punto qualunque E dell'oggetto CA parallelo allo specchio MN si conducono i raggi EC' EA' alle estremità dell'immagine, e seganti per conseguenza lo specchio nei punti f', n', sarà f'n' la porzione dello specchio occu-

pata dall'immagine. Ora essendo simili i triangoli C'Rf', C'C'E., e d'altronde $C'R = \frac{1}{2} C'C$, anche $C'f' = \frac{1}{2} C'E = Ef'$; quindi a motivo de' triangoli simili Ef'n', EC'A', si avrà $Ef' : EC' :: f'n' : C'A'$; ma $Ef' = \frac{1}{2} EC'$; dunque anche $f'n' = \frac{1}{2} C'A' = \frac{1}{2} CA$; ciò è l'immagine occupa una porzione di specchio uguale per tutti i lati alla metà delle dimensioni lineari dell'oggetto; onde se pongasi un occhio in E. niuno potrà vedersi intieramente in uno specchio parallello al suo volto, o vi si avvicini, o se ne allontani, quando lo specchio non abbia la metà almeno delle sue dimensioni lineari, perchè anche l'immagine vi si avvicina, o se ne allontana ugualmente; e siccome le aree, o superficie simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi, è chiaro, che uno non potrà vedere nello specchio intieramente il suo volto, se l'area dello specchio non sia simile, ed uguale alla quarta parte della superficie del volto.

Fig.ª 20

Se lo specchio piano PS (fig.ª 20) è mobile attorno all'asse che passa pel punto I, e se

LI esprima un raggio di luce incidente sopra un punto dello specchio corrispondente all'asse di rotazione, il moto angolare dello specchio sarà la metà del moto angolare del raggio riflesso IL. Imperocchè supposto lo specchio nella posizione PS, ed innalzata la normale d'incidenza IA, per la nota legge di riflessione (   ) si avrà ang: LIS = lIP, ossia arc LS = arc: lP. Supponiamo ora che lo specchio ruotando attorno ad I prenda la posizione SIp formante colla precedente l'angolo sIS misurato dall'arco Ss; anche la normale IA prenderà la posizione Ia, e formerà colla posizione primitiva l'angolo AIa = ang: sIs. Il raggio LI che ha costantemente conservata la sua direzione, si rifletterà sulla nuova direzione Il', e si avrà al solito ang: LIS = l'Ip, ossia arc: Ls = arc: l'p; quindi durante la rotazione Ss dello specchio il raggio riflesso Il avrà percorso l'angolo lIl', ossia ll'. Indicando ora gli angoli per mezzo degli archi circola-

ri ad essi corrispondenti, si avrà arc. $ll' = lp = l'p = lP + Pp - l'p$; ma arc: $lP = 45°$; arc: $Pp = 55$; arc: $l'p = 45$; dunque arc: $ll' = 45 + 55 - 45 = 45 + 55 + 55 - 45$; quindi arc $ll' = 255$: cioè l'arco percorso dal raggio riflesso è uguale al doppio dell'arco descritto dallo specchio, che val quanto dire, il moto angolare dell'immagine, o raggio riflesso è doppio di quello dello specchio, ed ecco come resta spiegato il rapido movimento delle immagini riflesse da specchi piani, mentre essi hanno appena un moto suddupplo.

Abbiamo fin qui considerati questi specchi piani, che hanno una sola superficie riflettente, come sono i metallici, e che non danno in conseguenza che una sola immagine dell'oggetto. Ma se lo specchio è di cristallo, due superficie debbonsi in esso distinguere, parallele, e distanti fra loro quant'è la grossezza del cristallo. La superficie anteriore è nuda, sull'altra superficie è stesa l'amalgama di stagno, e di mercurio, che attaccandosi alla superficie pia-

na del cristallo forma una superficie metallica piana, e adattatissima a riflettere i raggi di luce; mentre la prima superficie siccome appartenente ad un corpo diafano, non ne rifletterà che in tenuissima copia, come ce lo dimostra la sperienza.

Se dunque MPP'M' (fig.^a 21) rappresenti uno specchio di cristallo terminato dalla superficie anteriore MP, e dalla posteriore M'P' amalgamata, e sia CA un oggetto luminoso che per maggior semplicità di costruzione vien supposto normale allo specchio, ed hik l'occhio dell'osservatore. Abbassata la normale indefinita CPc' ( ) e riguardando le due superficie MP, M'P' come due specchi paralelli, risulterà rispetto alla prima l'immagine ca, e rispetto all'altra superficie M'P' l'immagine sarà c'a'; e siccome maggior copia di luce si riflette dalla superficie M'P', che dall'altra MP, chiaro è, che l'immagine c'a' sarà molto più vivida che l'altra ca.

Cerchiamo ora la distanza aa' fra due pun-

Fig.^a 21

ti simili, e corrispondenti a, a' delle due immagini. A tal uopo si osservi che per costruzione si ha 1°. $PA = Pa = PP' + P'a$; 2° $P'A = P'a'$, ossia $PA + P'P = P'a + aa'$. Sottraendo la prima dalla seconda si avrà $PP' = aa' - PP'$; quindi la distanza cercata aa' è $= 2PP'$.

Da tutto ciò evidentemente raccogliesi 1°. Che uno specchio di cristallo presenta sempre all'occhio esistente fuori della normale che passa per l'oggetto, due immagini, l'una ca più smunta e più vicina, l'altra $c'a'$ più lontana, e più vivida. 2°. Che la distanza de' punti corrispondenti delle due immagini è sempre uguale al doppio della grossezza dello specchio. ~~Oltre alle due accennate immagini è sempre uguale al doppio della grossezza dello specchio~~. Oltre alle due accennate immagini molte altre talvolta si ravisano, massime quando il raggio incidente, ed il riflesso formano un angolo ottusissimo, ma di esse, e delle cagioni da cui provengono si parlerà in appresso.

Delle Immagini Prodotte da Due Specchi Piani.

Tre casi debbonsi distinguere in questa ricerca, nella quale prescindo dalla dupplicazione delle immagini risultante dagli specchj cristallini. 1°. Quando i due specchj esistono nello stesso piano. 2°. Quando sono paralelli fra loro. 3°. Quando formano un angolo qualunque.

1°. Caso. Egli è manifesto che nella prima ipotesi i due specchj non ne formeranno che un solo quindi non presenterà che una sola immagine dell'oggetto.

2°. Caso. Siano GH, LM (figa. 22) due specchi paralelli; ab un oggetto luminoso posto fra essi, C il centro della pupilla dell'osservatore. Condotte pei punti b, a dell'oggetto le indefinite AB, EF normali agli specchj, si prendano da una parte ub''= ub, ra''= ra; e dall'altra xb'= xb, ta'= ta, e tirate dal punto c ai punti b'', a'', b', a' le rette cb'', ca'', cb', ca', si avranno sullo spec-

Fig.a 22

chio GH i punti d, f, e sullo specchio LM i punti n, i, contro i quali urtando i raggi luminosi bd, af, bn, ai, si dirigeranno al centro C della pupilla (   ), e risulteranno le due immagini b''a'', b'a'. ....

Ma fra gl'infiniti raggi che partono dal punto luminoso b, ve ne può esser uno, per es: bc, il quale urtando nello specchio GH, e rimbalzando in h contro l'altro specchio, venga da questo rimbalzato in guisa, che entri nell'occhio C; questo raggio bchC spezzato da due riflessioni, dipingerà nell'occhio l'immagine del punto b da cui deriva, ed essendo quest'immagine riferita sulla direzione del raggio entrante nell'occhio, si vedrà questo punto sulla direzione Ch. Ragionando per simil modo rispetto ad un altro punto a dell'oggetto ab, si vedrà che da a può partire un raggio ac, che riflesso prima in e verso g, e da g riflesso verso l'occhio C, vi dipinga l'immagine del punto a, che si riferirà in a''' sulla direzione del raggio

cq. Dunque l'occhio vedrà nello specchio L.M oltre la prima immagine a'b', un altra immagine a'''b''' risultante dai raggi due volte riflessi. Lo stesso dicasi del raggio bz, che dopo una riflessione in z contro lo specchio L.M, ed un'altra in s contro lo specchio GH entra nell'occhio c sulla direzione sc, e vedési conseguentemente un immagine del punto b in b^{iv}: così il raggio am che dall'altro punto a dell'oggetto urta in m, e si riflette verso p, ed entra nell'occhio c sulla direzione cp, vi dipingerà l'immagine del punto a, la quale sarà veduta sulla direzione del raggio cp, ed apparirà quindi una nuova immagine a^{iv}b^{iv} dell'oggetto ab.

Similmente si vede che fra gl'infiniti raggi che dai punti luminosi b, a si slanciano contro i due specchi ve ne saranno alcuni che dopo tre, quattro, cinque...... riflessioni entreranno nella pupilla c, e dipingeranno in conseguenza nuove immagini dell'oggetto luminoso.

Per determinare graficamente i punti di

riflessione c, h del raggio bc; e, g del raggio ae, prendo sulle normali AB, EF le porzioni $xb''' = xb''$, $a'''t = a''t$: conduco le rette Cb''', Ca''' seganti lo specchio LM in h, g, dai quali tiro le rette hb'', ga'' seganti l'altro specchio in c, e. I punti c, h, e, g sono i cercati punti di riflessione, disposti cioè in tal modo, che i raggi di luce bc, ae dopo essersi riflessi due volte secondo la nota legge, si dirigeranno al centro C della pupilla. Convien adunque dimostrare, che ang: $ucb = rch$, e che ang: $chx = ghC$.

A tal fine osservo GH normale ad AB, ed $ub'' = ub$ si avrà ang. $ucb = ucb'' = rch$; ed a motivo delle parallele GH, LM, ang. $rch = chx$; ma per costruzione i due triangoli rettangoli $b''xh$, $b'''xh$ sono uguali; quindi ang. $chx = xhb''' = ghC$; dunque ang: $ucb = chx = ghC$.

Dal che si vede 1°. Che la posizione della seconda immagine $b'''a'''$ nello specchio LM è determinata precisamente nella stessa maniera, come se la prima immagine $a'b'$ del-

l'altro specchio fosse un oggetto luminoso rispetto allo specchio paralello LM. Lo stesso dicasi dell'altra seconda immagine $b^{iv}a^{iv}$ nello specchio GH rispetto alla quale la prima immagine $a'b'$ fa le veci di oggetto luminoso. 2°. Che essendo piani gli specchi ciascuna immagine è sempre uguale all'oggetto (   ), quindi si avrà $a'b' = ab = a''b'' = a'''b''' = a^{iv}b^{iv}$...... 3°. Che essendo queste immagini uguali comprese fra le stesse paralelle AB, EF, si avrà neccessariamente $bb''' = aa'''$, $bb^{iv} = aa^{iv}$, $b''b' = a''a'$..... donde si vede, che le due prime immagini $a'b'$, $a''b''$ sono paralelle fra loro, e non all'oggetto ab, a meno che esso non sia paralello agli specchi; che le seconde immagini $b'''a'''$, $b^{iv}a^{iv}$ sono paralelle fra loro, ed all'oggetto; ed in generale che le immagini d'ordine impari sono soltanto paralelle fra loro, e che quelle d'ordine pari sono paralelle frà loro, ed all'oggetto ab. 4°. Che siccome l'immagine di un dato ordine fa le veci d'oggetto per un immagine d'ordine immediatamente infe-

riore, ognun vede che negli specchj paralelli il numero delle immagini è infinito. 5°. Che le immagini sebbene conservino la stessa dimensione assoluta dell'oggetto, pure a misura che si allontanano appariranno sotto un angolo minore; quindi la loro apparente grandezza andrà continuamente scemando. 6°. Che la distanza cb'' fra l'occhio al punto b'' della prima immagine è uguale $cd + db'' = cd + db$ somma del raggio incidente, dal punto b, e del raggio riflesso: la distanza $cb''' = ch + hb''' = ch + hb'' = ch + hc + cb'' = ch + hc + cb$ somma del raggio incidente, e dei raggi riflessi. Donde si vede, che la distanza dall'occhio da un punto qualunque di una data immagine è sempre uguale al cammino che deve fare il raggio di luce prima di arrivare dal punto corrispondente dell'oggetto all'occhio..

3°. Caso. Supponiamo ora che i due specchi MC, NC (fig.^a 23) formino un angolo qualunque MCN; e che l'oggetto SS', e l'occhio O siano collo-

Fig. a 23

cati entro l'angolo della loro apertura. Affinchè la moltiplicità delle linee non generi confusione nella figura, non considererò, come nel caso precedente, che i soli raggi che entrano nel centro della pupilla O non assumendo che un sol punto S dell'oggetto luminoso, poichè le operazioni che si fanno riguardo ad esso, si applicano appuntino a qualsiasi altro punto S'.

Condotta da S la indefinita Sa1 normale allo specchio MC, e presa a1 = aS, e tirata all'occhio O, la retta 1O segante in b lo specchio, indi condotto da S il raggio Sb, si avrà manifestamente ang. Sba = CbO; quindi l'occhio O vedrà il punto S sulla direzione del raggio riflesso Ob, e lo riferirà al punto 1, prima immagine del punto S rispetto allo specchio MC.

Abbassata da 1 la indefinita 1g2 normale all'altro specchio CB, e presa g2 = g1, dall'occhio O al punto 2 si tiri la retta O2 segante CB in h; dal punto h si tiri al punto 1 la retta h1 segante lo specchio MC in c, e final-

mente si tiri la retta Sc. Da questa costruzione risulta manifestamente triang: rettan: $thg = hg2$; quindi ang: $gh2 = ght$; ma $gh2$ = ang: OhN, dunque ang. OhN = ang. ght. Similmente essendo uguali i due triangoli rettangoli Sca, tca si avrà ang. ScA = ang. act; ma $act = dch$; dunque ang. $Sca = dch$. Donde si vede, che il raggio di luce Sc dopo una prima riflessione in c, ed un altra in h entrerà nell'occhio O sulla direzione Oh, e vi dipingerà una seconda immagine del punto S, che verrà riferita al punto 2. La distanza O2 dell'occhio dalla seconda immagine è $= Oh + h2$ $= Oh + ht = Oh + hc + ct = Oh + hc + cS$, la qual somma esprime il cammino del raggio di luce Sc percorso prima di arrivare all'occhio O.

Dal punto 2 luogo della seconda immagine si tiri l'indefinita 2i3 normale in i allo specchio CM prolungato se è necessario, e presa $i3 = i2$, si tiri all'occhio O la retta 3O segante CM in K; da questo punto alla secon-

da immagine 2 si tiri la K2 segante l'altro specchio in l; da l si tiri alla prima immagine 1 la retta l1 segante CM in δ; e finalmente dal punto δ al punto luminoso S si tiri la retta Sδ, che esprime quel raggio di luce, che urtando prima in δ, indi in l, poi in K, arriva finalmente dopo tre riflessioni nell'occhio O, il quale vedrà in 3 analoga immagine del punto luminoso S. Infatti per l'uguaglianza de' triangoli rettangoli Ki3, Ki2, si ha ang: iK3 = iK2, ma iK3 = OKa; dunque iK2 = OKa. Inoltre i triangoli rettangoli uguali lg1, lg2 danno ang. gl2 = gl1; ma gl2 = KlC; dunque gl1 = KlC. Finalmente i due triangoli rettangoli uguali Sδa, 1δa, danno ang: 1δa = Sδa ma 1δa = Kδl; dunque Sδa = Kδl. Quindi l'accennata costruzione grafica determina precisamente quel raggio Sδ di luce, che dopo tre riflessioni in δ, l, K, fatte secondo la nota legge, perviene all'occhio O. Rispetto alla distanza O3 fra l'occhio O, e la terza immagine,

$ll' + l'p = lP + Pp$

$ll' = lP + Pp - l'p$

$I_1 S = 45°$

$Ss = 15°$

$Aa = 15°$

$al = 30°$

$ll' = 45°$

$i + \alpha = al + x$

$i + \alpha = i - \alpha + x$

$x = 2\alpha$

$lp + ad' = 90°$

$\lambda + ll' + l'p = 90°$

si osserverà che $O3 = OK + K3 = OK + K2 = OK + Kl + l2 = OK + Kl + l1 = OK + Kl + l\delta + \delta 1 = OK + Kl + l\delta + \delta S$ somma esprimente il cammino percorso dal raggio di luce $S\delta$ contro i due specchj prima di arrivare all'occhio O.

Dal punto 3, luogo della terza immagine si conduca la indefinita $3a'4$ normale allo specchio NC prolungato se è neccessario; e presa $a'4 = a'3$ si conduca all'occhio O la retta $4O$ segante NC in n, dal qual punto si conduca alla terza immagine 3 la retta $n3$ segante lo specchio MC in o; dal punto o alla seconda immagine 2 si tiri la $o2$ segante lo specchio CN in p; da p si conduca alla prima immagine 1 la retta $p1$ segante lo specchio CM in e, e finalmente condotta da e ad S la retta Se, essa esprimerà la direzione di quel raggio di luce, che dopo essersi riflesso prima in e, indi in p, in o, e finalmente in n entra nell'occhio O sulla direzione nO, e vi forma un immagine del punto luminoso S, che vien riferita al punto 4. La ragione di

questa costruzione è manifesta per le dimostrazioni precedenti, come è pur manifesto che la distanza O4 è uguale On+no+op+pe+eS.

Nello stesso modo si determineranno i luoghi della quinta, e della sesta immagini susseguenti se pure hanno luogo.

Applicando all'altra prima immagine II formata nell'altro specchio CN i ragionamenti, e le operazioni istituite per l'immagine II, si avrà un altra serie d'immagini II-II, III-III, IV-IV..... la posizione delle quali è determinata da costruzioni perfettamente analoghe alle precedenti.

Considerando attentamente il metodo ora esposto per determinare il luogo delle immagini si vedrà 1°. Che l'immagine SS', o l'immagine di un immagine considerata come oggetto è sempre veduta dall'occhio O dipinta in quello specchio, sopra il quale dall'oggetto si abbassa la normale. 2°. Che l'ultimo ramo de' raggi riflessi, quello cioè che entra nell'occhio,

quale ad esempio il raggio KO, deve neccessariamente esser riflesso da quello specchio, sul quale si è abbassata la normale, ed in cui dicesi per conseguenza vedere l'immagine. 3°. Che per poter vedere un'immagine qualunque p: e: la 3ª entro lo specchio MC non solo l'ultimo ramò KO deve provenire da questo specchio, ma di più conviene che i tre punti di riflessione δ, l, K cadano tutti sopra gli specchi, così che se un solo di essi esistesse fuori della superficie specolare, verrebbe distrutta l'immagine a cui appartiene il suddetto punto di riflessione. Nella (fig.ª 23) in cui si suppone che gli specchi arrivino sino all'intersezione C, non si possono vedere che solo cinque immagini 1, 2, 3, 4, 5 risultanti rispettivamente dai raggi Sb, Sc, Sδ, Se, Sf, che dal punto luminoso S radono immediatamente sullo specchio CM, giacchè per ciascun raggio si hanno tutti i punti di riflessione sparsi sulle superficie di amendue gli specchj. Ma se dall'immagine SS che si vede nello specchio CM per

mezzo del raggio vO si abbassi la normale Sc'6 sullo specchio CN prolungato, e si prenda al solito c'6 = c'S, onde risulta l'immagine 66 da vedersi in NC, e si conduca dall'occhio la retta 6O, la porzione Ox di esso che esprime l'ultimo ramo del raggio riflesso che entra nell'occhio, e che dovrebbe esser riflesso dallo specchio NC, non lo è altrimenti; quindi lo specchio CN non può rappresentare all'occhio O la sesta immagine 66 dell'oggetto SS'. Nella stessa maniera si dimostrerà che fra gl'infiniti raggi che dal punto luminoso S possono cadere immediatamente nell'altro specchio CN, cinque soltanto si dirigeranno dopo varie riflessioni all'occhio per dipingervi le immagini I, II, III, IV, V, e che la VI, la quale dovrebbe vedersi nello specchio CM, non potrà esservi dipinta; imperocchè se dall'occhio O si tiri all'immagine VI la retta O VI, essa taglierà non già lo specchio CM, ma l'altro CN. Condotte dal punto C concorso dei due specchi al punto luminoso S, alle immagini 1, 2, 3......, le

rette CS, C1, C2, C3....... saranno esse tutte fra loro uguali; e per conseguenza le immagini del punto luminoso S saranno situate sopra la circonferenza di un circolo, il cui centro è il concorso degli specchj, e per raggio la distanza del punto luminoso S dal suddetto punto. Infatti essendo S1 normale e divisa per metà da CM; i due triangoli rettangoli Ca1, CaS danno C1 = CS; Similmente i due triangoli uguali Cg1, Cg2 danno C1 = C2; quindi C1 = CS = C2; nella stessa maniera si dimostrerà che C3 = C1 = CS = C2: Donde vuolsi conchiudere, che tutte le immagini 1, 2, 3, 4......, del punto luminoso S esistono nella circonferenza SA3E2S che ha C per centro, e per raggio CS. Applicando questa dimostrazione ad un altro punto qualunque S' dell'oggetto SS'; si vedrà che tutte le immagini di lui esisteranno sul circolo S'A'B' che ha lo stesso centro C, e per raggio la distanza CS' fra il centro, ed il punto luminoso S'.

In altra maniera molto più facile, e spe-

dita della precedente si possono determinare i luoghi delle immagini, ed il loro numero. Questo metodo, che non consiste che in un semplice trasporto di archi verrà indicato nella soluzione del seguente problema.

Probl: Dato l'angolo MCN formato in C dal concorso dei due specchi CM, CN, l'angolo ACS formato dallo specchio CM colla retta condotta da C ad un dato punto S dell'oggetto luminoso; l'angolo SCO, ossia SCL formato dalle rette CS, CL condotte dal punto luminoso, ed all'occhio; e finalmente l'angolo LCB, determinare per mezzo di un semplice trasporto di archi dati, il sito, ed il numero delle immagini che si potranno vedere dall'occhio O posto nell'apertura dei due specchi.

Soluz: Descritto dal centro C col raggio CS il circolo SBEA, e fatto l'arco AS, o l'angolo ACS = b, l'angolo ACL, o l'arco AL = a, l'angolo LCB, o l'arco LB = c, è chiaro che prendendo l'arco As = AS, il punto s sarà il luogo della pri-

ma immagine, poichè 1 dista tanto dallo specchio CA quanto ne dista il punto luminoso S. Quindi arc. $LA1 = LA + A1 = LA + AS = a + b$.

E siccome la normale $1g = g2$, sarà altresì arc: $1B$ = arc. $B2$, ossia arc. $LA1 + LB = B2$, e sostituiti i valori $a+b+c = B2 = 1B$, e poichè arc. $LB2$ = arc. $LB + B2$, si avrà arc. $LB2 = a+b+2c$ distanza arcuale fra la linea in cui esiste l'occhio O, e quella in cui trovasi l'immagine 2.

Similmente per la terza immagine 3, si ha la normale $i2 = i3$; quindi arc. $A3$ = arc. $A2$ = arc. $AL + L2$, e sostituiti i valori si avrà arc. $A3$ = arc. $A2 = 2a+b+2c$; l'arco $3 = LA + A3 = 3a+b+2c$, distanza arcuale fra la linea, o raggio in cui esiste l'occhio, ed il punto della 3ª immagine.

Rispetto alla quarta immagine si ha la normale $3a' = a'4$, quindi arc. $B4$ = arc. $B3$ = arc. $BL + L3 = 3a+b+3c$, e siccome arc. $LB4$ = arc. LB + arc. $B4$, sostituendo si troverà arc. $LB4 = 3a+b+4c$.

Per la quinta immagine si troverebbe

arc. A35 = 4a+b+4c, e l'arco 435 = 5a+b+4c.

Raccogliendo in un sol quadro tutti i valori degli archi compresi fra il punto L, ed i punti delle immagini d'ordine impari, e pari si formerà la seguente tavola.

Per le immagini d'ordine impari	Differenze	Per le immagini d'ordine pari	Differenze
arc. L 1 = a+b		arc. L 2 = a+b+2c	
	arc. 1.3 = 2a+2c		arc. 2.4 = 2a+2c
arc. L 3 = 3a+b+2c		arc. L 4 = 3a+b+4c	
	arc. 3.5 = 2a+2c		arc. 4.6 = 2a+2c
arc. L 5 = 5a+b+4c		arc. L 6 = 5a+b+6c	
	arc. 57 = 2a+2c		arc. 68 = 2a+2c
arc. L 7 = 7a+b+6c		arc. L 8 = 7a+b+8c	

Donde si vede che gli archi computati da L relativamente alle immagini d'ordine impari; o pari hanno sempre la stessa differenza 2A + 2C = 2(a+c) = 2(AL + LB) = 2. arc. AB. Determinata adunque la prima, e la seconda immagine di un punto luminoso S, si determineranno primieramente tut-

te le immagini 3,5,7......, d'ordine impari trasportando da 1 in 3, da 3 in 5....... il doppio dell'arco AB compreso fra i due specchi, e misurante il loro angolo, indi si determineranno tutte le immagini d'ordine pari 2,4,6......, trasportando da 2 in 4, da 4 in 6...... lo stesso arco doppio.

Degli Specchi Sferici

Gli Specchi sferici sono segmenti di superficie sferiche, concave, e convesse, quale ad esempio è ABDEG (fig.ª 24) levigate, e pulite a tal segno di poter riflettere in copia la luce che si dirigge contro di esse. Le estremità, o bordi di questi specchi sono neccessariamente di figura circolare BDEG risultante dall'incontro del piano segante colla superficie della sfera MBAE.

Fig.ª 24

L'area del suddetto circolo BDEG appellasi apertura dello specchio. Il centro dell'apertura è L, mentre quello dello specchio è lo stesso centro C della sfera. Il raggio dell'apertura è LB; quello dello specchio è CA uguale al raggio CA della sfera.

La retta MA che passa pel centro della sfera; ed è normale all'apertura circolare BDEG chiamasi asse principale dello specchio, o semplicemente asse dello specchio. Egli è visibile che l'asse MA passa pel centro I. dell'apertura, e che il punto d'incontro A colla superficie dello specchio è equidistante da tutti i punti del bordo circolare BDEG dello specchio.

Che se una retta p. e. PN passi soltanto pel centro C dello specchio, e non pel centro I. dell'apertura, esso appellasi asse secondario dello specchio

L'arco BAE del circolo massimo che passa per l'asse dello specchio, ed è compreso fra i punti opposti B,E dell'apertura circolare dello specchio dicesi ampiezza arcuale, o semplicemente ampiezza dello specchio. Quest'arco è manifestamente diviso per metà in A dall'asse MA dello specchio. Il punto A appellasi centro dell'ampiezza. In seguito rappresenterò sempre gli specchi sferici tanto concavi, che convessi per mezzo della sola ampiezza arcuale ABE; e da prima li sup-

porrò tutti metallici, onde non si abbia a considerar che una sola riflessione, mentre negli specchi cristallini due riflessioni per lo meno hanno luogo, come si è già indicato rispetto agli specchi piani.

Gli specchi di cui si fa uso per le sperienze delicate, e per gli strumenti di Ottica hanno sempre un ampiezza arcuale di pochi gradi. Il celebre Sig.r Short d'Edimbourg non ha mai dato a suoi specchi un'ampiezza maggiore di 8 gradi. In alcuni casi però l'ampiezza può essere persino triplicata, come si vedrà in appresso.

Fig.a 25

Dato pertanto uno specchio concavo qualunque BA'E (fig.a 25) il cui asse principale sia MCA' e l'ampiezza BA'E, e supposto che un punto qualunque H esista sopra un asse secondario qualunque HCH', non sarà difficile di assegnare nell'asse medesimo, il punto, o fuoco h ove vanno a riunirsi in gran copia i raggi HH'', HH''' dopo essere stati riflessi dallo specchio sulla direzione H''h, H'''h. Imperocchè presi sullo spec-

chio i due archi piccolissimi, ed uguali H'H''; H'H''';
e supposto che un raggio di luce cada in H'', e l'altro in H''' questi due raggi incidenti saranno vicinissimi al loro asse HH', cosicchè si avrà prossimamente HH''=HH'=HH'''; hH''=hH'=hH'''. Condotte ora dal centro C ai punti d'incidenza H'', H''' i raggi CH'', CH''' normali alla curva ne' rispettivi punti H'', H''' è chiaro, che il raggio incidente HH' siccome coincidente coll'asse, e normale per conseguenza allo specchio in H', rimbalzerà sulla stessa direzione H'C: gli altri raggi HH''; HH''' formanti angoli uguali coll'asse HH' saranno riflessi, secondo la nota legge, secondo hH''', hH''; cosicchè si avrà ang. HH''C = CH''h = HH'''C = CH'''h; e siccome le normali d'incidenza CH'', CH''' giacciono (   ) fra il raggio incidente ed il riflesso, i raggi riflessi H''h, H'''h dovranno esistere in parte opposta a quella dei raggi incidenti; quindi nel nostro caso cadranno entro i due raggi CH'', CH''' e taglieranno l'asse HCH' fra lo specchio, ed il centro C. Egli è inoltre manifesto, che amendue concorre-

ranno in un sol punto h, poichè essendo H'H'' = H'H''' ang. hH''C = ang. hH'''C, anche l'angolo mistilineo hH''H' = ang. hH'''H' mistilineo pure, nè risultano uguali i due triangoli mistilinei H''H'h, H'''H'h, e per conseguenza il punto h deve essere l'incontro comune dei due raggi riflessi coll'asse HH'. Lo stesso dicasi di tutti que' raggi di luce, che partendo da H cadranno sulla circonferenza del piccolo segmento sferico corrispondente all'arco H''H'H''' dello specchio. Tutti questi raggi adunque si uniranno nello stesso punto, o fuoco h dell'asse HH', ed ivi dipingeranno un immagine del punto H da cui derivano.

Per determinare la distanza, o lunghezza focale hH', ossia la porzione dell'asse compresa fra il foco, e lo specchio, faccio h'H = f; il raggio dello specchio CH' = CA' = CH'' = r; la distanza HH' del punto luminoso H dallo specchio = δ, ed osservo che, nel triangolo HH''h, il raggio normale H''C divide per metà l'angolo HH''h formato dal raggio incidente, e dal raggio riflesso; quindi dal

la Geometria si ha HC : Ch :: HH'' : H''h; ma HC = HH' − H'C = δ − r; Ch = CH' − H'h = r − f, ed attesa la piccolezza dell'arco H'H'', si ha prossimamente H''h = H'h = f; HH'' = HH' = δ; sostituendo adunque nella precedente proporzione si avrà δ − r : r − f :: d : f; d'onde risulta $f = \frac{dr}{2d-r}$ espressione generale della lunghezza focale di uno specchio concavo sferico. Se $r > 2d$, il foco f diventa negativo, vale a dire i raggi di luce invece di convergere in un punto h posto fra lo specchio, e l'oggetto, dopo la riflessione divergerebbero, e per conseguenza il loro punto d'unione esisterebbe dietro lo specchio. In tal caso il foco dicesi negativo, ideale, immaginario: ma di questo caso si parlerà fra poco.

Sia ora uno specchio convesso BA'E (fig.ᵃ 26) il cui centro è C, e l'arco BA'E ne misura l'ampiezza. Supposto in H un punto luminoso, e condotto pel centro l'asse secondario HH'C normale in H' alla superficie convessa, indi presi due archi piccolissimi, ed uguali H'H'', H'H''', determinati i punti estremi di un piccolo segmento sferico: suppongan-

Fig. 26

si diretti ad H'', H''' i due raggi di luce HH'', HH'''.
Ognun vede che tirati dal centro C i raggi, o normali prolungate CH''c'', CH'''c''' ai punti d'incidenza, si avrà ang. HH''c'' = c''H''h''; HH'''c''' = c'''H'''h''';
e le rette H''h'', H'''h''' esprimeranno le direzioni dei raggi riflessi; e poichè le normali Cc'', Cc''' dividono per metà gli angoli HH''h'', HH'''h''' formati dai raggi incidenti, e riflessi, è chiaro che i raggi riflessi H''h'', H'''h''' esisteranno rispetto alle normali in posizione opposta a quella de' raggi incidenti; quindi poichè le normali sono divergenti, ed i raggi sono riflessi giusta la divergenza, o nel senso della divergenza di esse; vale a dire da H'' verso h'', e da H''' verso h''', è chiaro 1°. Che i raggi riflessi saranno divergenti; 2°. Che la divergenza loro sarà maggiore di quella delle normali Cc'', Cc''' condotte pei punti d'incidenza. Dunque se suppongasi, che i raggi riflessi siano prodotti in senso opposto alla naturale loro direzione entro la sostanza dello specchio, è chiaro, che attesa l'uguaglianza degli archi H'H'', H'H''' concorreranno ~~amendue~~ in un sol punto h che chia-

masi foco ideale, virtuale, immaginario de' raggi incidenti HH'', HH'''. Quello che si è detto di questi due raggi, si applica ugualmente a tutti i raggi di luce, che dal punto luminoso H si diriggono ai punti del bordo circolare del piccolo segmento sferico corrispondente all'arco H''H'H'''; quindi tutti questi raggi prolungati in senso opposto a quello della loro riflessione concorrerebbero nello stesso foco immaginario h.

Per determinare la lunghezza focale immaginaria H'h convien osservare che nel triangolo CHH'' l'angolo CH''H è supplemento dell'angolo CH''m = c''H''H = c''H''h'' = CH''h; quindi sen CH''H = sen CH''h; quindi si avrà CH : HH'' :: sen CH''h : sen H''CH' :: sen CH''h : sen H''Ch; dunque CH : HH'' :: Ch : hH'; e chiamata come sopra la distanza HH' = d; il raggio dello specchio CA' = CH' = CH'' = r; e la lunghezza, o distanza focale H'h = f, si avrà CH = HH' + H'C = d + r, ed attesa la piccolezza del segmento H''H'H''', per cui le rette HH'', HH', HH''', hH'', hH', hH''' sono vicinissime si avrà HH'' = HH' = δ; Ch = CH' − H'h = r − f;

$hH'' = hH' = f$; quindi sostituendo nella proporzione precedente si avrà $\delta + r : \delta :: r - f : f$; quindi $f = \frac{\delta r}{2\delta + r}$ espressione generale della lunghezza focale immaginaria negli specchi convessi, analoga in parte a quella degli specchi concavi (   ).

Osservaz: 1.a Confrontando le due (fig.a 25, e 26) si vedrà 1.o Che nella fig.a 26 il raggio CH' di curvatura rispetto all'oggetto HI è in posizione opposta a quella della fig.a 25 2.o che il foco reale h di questa figura giace fra l'oggetto, e lo specchio quando il valore di f (   ) è positivo, e giace in parte opposta, ossia dietro la superficie riflettente quando f è negativo: ma nello specchio convesso della fig.a 26 il foco è sempre dietro la superficie riflettente BA'E (fig.a 26); quindi il foco è sempre immaginario, e negativo. Segue da ciò che se per foco positivo intendasi la distanza hH' (fig.a 25) che passa fra il punto h di reale unione de' raggi riflessi, e la superficie riflettente BA'E, per foco negativo dovrà intendersi la distanza $H'h$ (fig.a 26) fra il punto h d'immaginario concorso de' raggi, e la superficie di ri-

Fig.a 25 Fig.a 26 Fig.a 25 e 26

Fig.a 25 Fig.a 26 Fig.a 26

flessione.

Segue da tutto ciò, che la formola generale della lunghezza focale per gli specchi concavi, e convessi può esser espressa elegantemente sotto questa forma $f = \frac{\pm \delta r}{2\delta \mp r} = \frac{\delta r}{\pm 2\delta - r}$: i segni superiori servono per gli specchi concavi, e gli inferiori pei convessi.

Osservaz: 2.a Siccome la precedente formola nasce dalla supposizione che i raggi incidenti HH'', HH''' (fig.a 25, e 26) siano vicinissimi all'asse e per conseguenza sensibilmente normali alla superficie dello specchio, onde abbiasi fisicamente HH'' = HH''' = HH', risultato sempre più vicino al vero, quanto più i raggi incidenti sono vicini all'asse HH', si vede 1.° Che quei soli raggi che dal punto luminoso H cadono sulla superficie del piccolo segmento sferico H''H'H''' si riuniranno tutti fisicamente in h (fig.a 25), e vi dipingeranno un immagine, o foco sensibile del punto raggiante H. 2.° Che se il punto d'incidenza H^v del raggio HH^v è a notabile distanza dall'asse HH' sul quale esiste il punto luminoso H, allora non potendosi più

Fig.a 25 e 26

Fig.a 25

supporre HH^{v} uguale ad HH', il raggio riflessoH^{v}h^{v} taglierà l'asse in t, e non in h; dal che si vede che specchi di questa specie non possono riflettere in un sol punto h tutti i raggi lanciati contro la loro superficie da un punto qualunque H, a meno che esso non esista nel centro C dello specchio. 3°. Che attesa la posizione molto obbliqua del raggio incidente HH^{v} rispetto all'arco elementare H^{iv}H^{v}H^{vi} i raggi vicinissimi ad HH^{v} quali sono HH^{iv}, HH^{vi} formano nei punti d'incidenza H^{iv}, H^{vi} angoli sensibilmente diversi da quello del raggio medio HH^{v}; e poichè al variar di quelli variasi anche l'angolo di riflessione, è chiaro, che i suddetti raggi benchè vicinissimi ad HH^{v} non potranno considerarsi neppure fisicamente uniti in t; quindi la densità di luce verso t sarà molto minore che in h, e per conseguenza la vera immagine del punto H non può esistere, che nel concorso h de' raggi vicini all'asse HH', ossia prossimamente normali alla superficie dello specchio. 4°. Applicando i precedenti ragiona-

menti a tutti i punti dell'oggetto luminoso TH, si vedrà che l'immagine di ciascuno di essi esisterà sopra quell'asse dello specchio sul quale trovasi il punto luminoso.

Osservaz: 3ª Se nella formola generale $f = \frac{\pm \delta r}{2\delta \mp r}$ si supponga che la distanza δ cresca, e diventi $\delta' > \delta$, la nuova lunghezza focale $f' = \frac{\pm \delta' r}{2\delta' \mp r}$ diminuisce, conciochè si ha $f' < f$. Riducendo infatti allo stesso denominatore i due valori di f, f' si avrà $\frac{\pm 2\delta\delta' r - \delta r^2}{(2\delta \mp r)(2\delta' \mp r)}$; $\frac{\pm 2\delta\delta' r - \delta' r^2}{(2\delta \mp r)(2\delta' \mp r)}$, ed essendo per ipotesi $\delta' > \delta$, ognun vede, 1º. Che coi segni superiori il numeratore della seconda è diminuito più di quello nol sia il numeratore della prima che esprime il valore di f; quindi se nei due specchi concavi sia $\delta' > \delta$, si ha $f' < f$, vale a dire crescendo la distanza dell'oggetto dallo specchio sferico, l'immagine si avvicina allo specchio, e reciprocamente. 2º. Coi segni inferiori per lo contrario il numeratore negativo della seconda è maggiore che quello della prima: dunque se negli specchi convessi si ha $\delta' > \delta$, risulta $-f' > f$, vale a dire crescendo la distanza cresce anche la

lunghezza del foco immaginario. Avvertasi però che tale aumento non è geometricamente proporzionale alla distanza.

Si giunge più speditamente agli stessi risultati nel seguente modo: si dividano per d i termini della frazione $f=\frac{\pm dr}{2d\mp r}$; si avrà $f=\frac{\pm r}{2\mp\frac{r}{d}}$. Prendendo i segni superiori, appartenenti agli specchi concavi, si vede che crescendo la distanza d scema il valore di $\frac{r}{d}$, che per essere negativo rende maggiore il numeratore $2-\frac{r}{d}$, e per conseguenza minore il valore di tutta la frazione esprimente il valore di f. Presi i segni inferiori relativi agli specchi concavi, e supposta crescente la distanza d, scemerà come sopra il valore di $\frac{r}{d}$, che essendo additivo alla quantità 2, il denominatore diverrà più piccolo; quindi crescerà il valore della frazione ossia di f.

Applicazione della formola $f=\frac{\pm dr}{2d\mp r}$ agli Specchi Piani

Si sa dalla Geometria che le superficie pia-

ne possono considerarsi porzioni di superficie sferiche di raggio infinito, e reciprocamente; quindi se nell'esposta formola suppongasi $r=\infty$, lo specchio da concavo, o convesso che era diverrà piano, e la lunghezza focale di tale specchio sarà espressa da $f=\frac{\pm \delta . \infty}{2\delta \mp \infty}$; e poichè una quantità finita qualunque è sempre nulla rispetto ad una che sia infinita; è chiaro che si avrà $f=\frac{\pm \delta . \infty}{\mp \infty}=-\delta$; cioè la lunghezza focale, ò la distanza dell'immagine o punto di concorso de' raggi riflessi dallo specchio è negativa, ed uguale alla distanza del punto luminoso dallo specchio medesimo, onde quanto l'uno è al di quà di esso, tanto l'altro esiste al di là della superficie riflettente.

Formazione, e Figura delle Immagini negli Specchi Sferici

La Teoria esposta nel § somministra un modo facile per determinare graficamente le immagini degli oggetti formate dagli specchi sferici. Condotti da tutti i punti T, A, H (fig. 25)

dell'oggetto gli assi TCT', ACA', HCH', e presi per ciascun asse i piccoli segmenti sferici A''A'A''', T''T'T''', H''H'H''', che servon di base ad altrettanti coni lucidi A''AA''', T''TT''', H''HH''', si tirino ai punti d'incidenza H'', A'', H'''..... i raggi, o cateti d'incidenza CH'', CH''', CA''..... e si formino per ciascun raggio di luce gli angoli di riflessione hH''C, hH'''C, aA''C, aA'''C ..... rispettivamente uguali agli angoli d'incidenza CH''H, CH'''H, CA''A, CA'''A...... e suoi rispettivi assi TT', AA', HH' si avranno le immagini t, a, h dei punti luminosi T, A, H; quindi tah sarà l'immagine dell'intero oggetto TAH.

Poichè l'immagine di un punto luminoso esiste sempre su quell'asse su cui esso esiste, ed incrocicchiandosi gli assi nel centro C dello specchio, è chiaro, che negli specchj concavi l'immagine tah sarà rovesciata rispetto all'oggetto TAH. Non così avviene negli specchj convessi, ne' quali i fochi, o immagini virtuali, o immaginarie h, a, t, esistono sui rispettivi assi prima del loro incrocicchiamento in C.

Giova qui osservare, che sebbene il raggio coincidente coll'asse secondario, ed alcuni de' raggi secondarj fossero impediti da non cadere nello specchio, non pertanto l'immagine del punto luminoso sarebbe dipinta nello stesso sito dagli altri raggi laterali non impediti, cosicchè l'immagine esisterà sempre sopra l'asse secondario geometrico, ma sarà più debole atteso lo scemamento de' raggi che sarebbero concorsi a formarla.

Per determinare in generale qual sia la forma dell'immagine tah, suppongo che TH sia un oggetto rettilineo inclinato arbitrariamente all'asse $A'M$ dello specchio concavo $BA'E$. Ognun vede, che i punti di questo oggetto p. e. T, A, H sono inegualmente distanti dai corrispondenti punti T', A', H' dello specchio determinati dai rispettivi assi TT', AA', HH'. Suppongo adunque $AA' = \delta$, $TT' = \delta'$, $HH' = \delta''$. Sostituendo le indicate distanze nella formola generale $f = \frac{\delta r}{2\delta - r}$, si avrà $A'a = f = \frac{\delta r}{2\delta - r}$; $T't = f' = \frac{\delta' r}{2\delta' - r}$; $H'h = f'' = \frac{\delta'' r}{2\delta'' - r}$; quindi $Ca = CA' - A'a = r - \frac{\delta r}{2\delta - r} = \frac{(\delta - r) r}{2\delta - r}$; $Ct = CT' - T't =$

$r - \frac{\partial' r}{2\partial' - r} = \frac{(\partial' - r)r}{2\partial' - r}$; $Ch = \frac{(\partial'' - r)r}{2\partial'' - r}$. Calcolando ora le distanze fra i punti dell'oggetto TH, e del centro C dello specchio si ha $TC = TT' - CT' = \partial' - r$; $AC = AA' - A'C = \partial - r$; $HC = HH' - H'C = \partial'' - r$. Ciò posto se l'immagine hat fosse rettilinea, e parallela all'oggetto TAH, come a prima vista si potrebbe sospettare, si avrebbero allora i triangoli simili TCA, tCa, HCA, hCa; quindi risulterebbero le seguenti proporzioni $AC(\partial - r) : HC(\partial'' - r) :: Ca\left(\frac{(\partial - r)r}{2\partial - r}\right) : Ch = \frac{(\partial'' - r)r}{2\partial - r}$; $AC(\partial - r) : TC(\partial' - r) :: Ca\left(\frac{(\partial - r)r}{2\partial - r}\right) : Ct = \frac{(\partial' - r)r}{2\partial - r}$.

Riunendo ora in un sol quadro i valori reali, ed ipotetici di Ch, Ct, e supposto $\partial'' < \partial$, e $\partial' > \partial$, si vedrà che il valore reale di Ch è maggiore del valor ipotetico, e che per conseguenza il foco h è più lontano dal centro C, ossia è più vicino allo specchio di quello che il comporti la supposta immagine rettilinea, e parallela all'oggetto; e che il valore reale di Ct è minore del valore supposto, il.

	Valori reali	Valori ipotetici
$Ch =$	$\frac{(\partial'' - r)r}{2\partial'' - r}$	$= \frac{(\partial'' - r)r}{2\partial - r}$
$Ct =$	$\frac{(\partial' - r)r}{2\partial' - r}$	$= \frac{(\partial' - r)r}{2\partial - r}$
$Ca =$	$\frac{(\partial - r)r}{2\partial - r}$	----------

che significa che il foco t è più vicino al centro c, e più lontano dallo specchio di quello che il comporti la suddetta supposizione. Dal che vuolsi conchiudere che l'immagine hat di un oggetto rettilineo formata da uno specchio concavo, non è sicuramente parallela al suo oggetto HAT.

Se l'oggetto TAH fosse circolare, e concentrico in C allo specchio BA'E, allora tutti i suoi punti T, A, H...... sarebbero egualmente distanti dai punti corrispondenti T', A', H' dello specchio determinati dai rispettivi assi. In tale ipotesi fatta come sopra $AA' = \delta$, si avrebbe pure $AA' = TT' = HH'$, ossia $\delta = \delta' = \delta''$; dal che risulta $ch = ct = ca$; quindi l'immagine hat sarà concentrica, e parallela allo specchio, ossia volgerà adesso la sua convessità.

Se l'oggetto rettilineo TAH di considerabile grandezza è normale all'asse principale MA', e suppongasi da esso diviso per metà in A, allora sarà $AT = AH$; $HH' = TT'$, ossia $\delta' = \delta''$, $AA' < HH'$, ossia $\delta < \delta'$; e le formole precedenti daranno $ct = ch = \frac{(\delta' - r)r}{2\delta' - r}$; $ca = \frac{(\delta - r)r}{2\delta - r}$; riducendo queste frazioni

al medesimo denominatore, si troverà $Ct = Ch$ (D) $= \frac{2\delta\delta' r - 2\delta r^2 - \delta' r^2 + r^3}{(2\delta' - r)(2\delta - r)}$; $Ca = \frac{2\delta\delta' r - 2\delta' r^2 - \delta r^2 - r^3}{(2\delta' - r)(2\delta - r)}$; esaminando i numeratori di queste due frazioni si vedrà, che essendo $\delta' > \delta$, la prima è maggiore della seconda, ossia Ch, e Ct sono maggiori di Ca, e che per conseguenza le immagini t, h dei punti estremi dell'oggetto sono più vicini allo specchio che l'immagine a del mezzo di esso: dunque la detta immagine avrà la forma di un arco circolare. Rimarebbe ora a determinare qual sia precisamente la figura dell'immagine hat, ma oltrecchè tal ricerca non è di somma importanza, diventa estremamente penosa allora quando nella esposizione di essa non possa farsi uso dell'analisi sublime. Basti dunque l'accennare che l'immagine di un oggetto rettilineo secondo le diverse posizioni rispetto all'asse, e le varie distanze dallo specchio, è una porzione ora di Parabola, or d'Ellisse, ora d'Iperbole, or di Circolo.

Supposto sempre l'oggetto rettilineo TAH normale all'asse, e diviso per metà da esso, immagi-

niamo che venga trasportato in tal posizione, a grandissima distanza dello specchio, e che la sua grandezza resti sempre la stessa. Ognun vede, che in tal ipotesi le distanze dei punti estremi T, H, e del punto di mezzo A sono sensibilmente uguali, cioè $HH' = TT' = AA' = \partial$, e per conseguenza $\partial = \partial'$; quindi le formole (D) diveranno $Ct = Ch = \frac{2\partial^2 r - 3\partial r^2 + r^3}{(2\partial - r)^2}$; $Ca = \frac{2\partial^2 r - 3\partial r^2 + r^3}{(2\partial - r)^2}$; quindi $Ct = Ch = Ca$. In tal caso adunque l'immagine dell'oggetto rettilineo sarà sensibilmente circolare, e concentrica allo specchio.

Le osservazioni, ed i calcoli fatti per le immagini reali formate negli specchi concavi, possono facilmente applicarsi alle immagini virtuali, o negative degli specchj convessi. Per lo che non credomi obbligato ad intrattenermi maggiormente su questo argomento. Basterà accennare, che ritenute le denominazioni dello specchio concavo, si ha pel convesso $A'a = f = \frac{\partial r}{2\partial + r}$; $T't = f' = \frac{\partial' r}{2\partial' + r}$; $H'h = f'' = \frac{\partial'' r}{2\partial'' + r}$; $Ca = CA' - A'a = r - \frac{\partial r}{2\partial + r} = \frac{(\partial + r)r}{2\partial + r}$; $Ct = \frac{(\partial' + r)r}{2\partial' + r}$; $Ch = \frac{(\partial'' + r)r}{2\partial'' + r}$; $AC = AA' + A'C = \partial + r$; $TC = \partial' + r$; $HC = \partial'' + r$. Per avere i valori di Ct, Ch relativi alla supposizione, che

l'immagine sia simile, e paralella all'oggetto, si farà la proporzione $AC : TC :: Ca : Ct$; ossia $\partial + r : \partial' + r :: \frac{(\partial + r)r}{2\partial + r}$; $Ct = \frac{(\partial' + r)r}{2\partial + r}$; similmente si troverà $Ch = \frac{(\partial'' + r)r}{2\partial + r}$.

Grandezza dell'Immagine rispetto all'oggetto;

Poichè le immagini degli oggetti non molto estesi, nè molto inclinati all'asse sono sensibilmente parallelle, e simili agli oggetti da cui derivano ( ), è chiaro, che i due triangoli TCH, tCh saranno simili, quindi si avrà $TC : Ct :: TH : th$; donde si vede, che le grandezze, o dimensioni lineari dell'oggetto, e della sua immagine stanno tra loro come le distanze TC, tC de' punti corrispondenti dell'oggetto, e dell'immagine dal centro dello specchio.

Se si esprimano per g, g' le dimensioni lineari omologhe dell'oggetto TH, e della sua immagine reale th, e si sostituiscano nella proporzione precedente i valori generali di $TC = \partial' - r$, e il valore supposto di $Ct = \frac{(\partial' - r)r}{2\partial - r}$, si troverà $g' = \frac{rg}{2\partial' - r}$ (K). espressione generale della dimensione lineare di un'im-

magine formata da uno specchio concavo.

Similmente nello specchio convesso della (fig.ª 26) si ha $TC:ct::TH:th$; ma $TC=d+r$; ed il valore supposto di $ct=\frac{(d+r)r}{2d+r}$, quindi fatto come sopra $HT=g$; $ht=g'$ si troverà $g'=\frac{rg}{2d+r}$ (L) espressione dell'immagine virtuale in uno specchio convesso.

Si osservi, che $r<2d+r$; e che $\frac{r}{2d+r}$ è una frazione genuina; quindi nello specchio convesso l'immagine g' è neccessariamente minore dell'oggetto g. Infatti essendo l'immagine sensibilmente paralella all'oggetto, e compresa entro gli stessi assi che l'oggetto, ma più vicina al centro c, è chiaro che la sua dimensione deve essere neccessariamente più piccola che quella dell'oggetto.

Della Posizione del Moto, e della visione delle Immagini

Riassumendo la formola generale $f=\frac{\pm dr}{2d\mp r}$ (M), ed eseguendo la divisione si avrà $f=\pm\frac{1}{2}r+\frac{r^2}{4d\mp 4r}$ (N) (*), ove i segni superiori servono per gli spec-

(*) Nota. Ad ottener più facilmente i risultati, o valori

chi concavi, e gl'inferiori per i convessi.

Supponiamo ora invariato il raggio r dello specchio; ed attribuiamo successivamente a δ valori differenti.

1.° Fatto $\delta = \delta'' = 0$, ossia supposto l'oggetto attiguo allo specchio si ha $f = \pm \frac{1}{2}r + \frac{r^2}{\mp 2r} = 0$; quindi $f = 0$

L'immagine adunque non disterà dalla superficie dello specchio, e dovrà considerarsi come stesa sopra di essa.

In questa ipotesi la formola (K) diventa $g' = -g$, dal che si vede che l'immagine è uguale all'oggetto, ed il segno negativo indica che essa è in posizione opposta a quella dell'immagine reale, la quale è sempre rovesciata rispetto all'oggetto; quindi in tal caso l'immagine sarà diritta. La cosa diviene manifesta qualora si rifletta, che un oggetto

---

diversi di f secondo i varj valori di δ, è meglio ridurre la formola generale (M) alla seguente forma, come precedentemente si è fatto, e si avria $f = \frac{\pm r}{2 \mp \frac{r}{\delta}}$. Posto $\delta = 0$ si ha $f = \frac{\pm r}{2 \mp \frac{r}{0}} = \frac{\pm r}{2 \mp \infty} = \frac{\pm r}{\mp \infty} = \mp 0$.

luminoso posto a contatto dello specchio, non può dirigere da ciascun de' suoi punti che un sol raggio di luce, il quale urterà lo specchio nel solo punto di contatto, quindi l'immagine piuttosto fittizia che reale, che ne risulta deve essere uguale all'oggetto, ed in posizione corrispondente alla sua.

Nella stessa ipotesi di $\delta=0$, la formola (L) dà $g'=g$; quindi anche negli specchi convessi l'immagine è uguale all'oggetto, ed è preceduta dal segno +, perchè in questi specchi l'immagine ha sempre la stessa posizione dell'oggetto.

2°. Se $\delta<\frac{r}{2}$, sarà altresì $2\delta<r$; quindi per gli specchi concavi la formola (M) avrà un denominatore negativo; e per conseguenza l'immagine sarà virtuale, vale a dire i raggi riflessi dallo specchio se fossero prodotti in senso opposto alla loro riflessione si unirebbero al di là dello specchio.

Così se NM (fig.ª 27) rappresenti un oggetto vicino, e concentrico allo specchio concavo PQ che la metà del raggio, di sorta che sia NN' <

Fig.ª 27

$\frac{1}{2}$ l N', condotti gli assi CN', CMM', e presi i piccoli archi M'M'', M'M''' si tirino i raggi, o cateti d'incidenza CM'', CM''': e poichè i cateti d'incidenza dividono per metà gli angoli MM''m'', MM'''m''' formati dai raggi incidenti, e riflessi; ed il raggio riflesso stendesi sempre in quella parte dello spazio, nel quale rispetto al cateto d'incidenza non cade il raggio incidente, è chiaro, che il raggio riflesso M''m'' non solo potrà incontrare l'asse secondario CM', ma neppure potrà riflettersi sulla direzione del cateto CM''. Applicando questi riflessi all'altro raggio riflesso M'''m''', si vedrà, che essi dopo la riflessione in M'', M''' divergono dal loro asse, e che per conseguenza non possono incontrarlo in m se non prolungati in senso opposto a quello della riflessione. Medesimo ragionamento per i raggi NN'', NN''' provenienti da N: i quali dopo la riflessione divergono dal loro asse CN', cui non possono incontrare in n che supponendoli prolungati in senso opposto alla riflessione. Dal che si vede che a siffatta

distanza, lo specchio non forma immagine reale dell'oggetto, e che in questo caso lo specchio concavo produce un effetto analogo a quello del convesso. Convien osservare, che l'oggetto MN, e la sua immagine negativa, o virtuale mn sono compresi fra gli stessi assi divergenti cn, cm, ed esistendo l'immagine virtuale al di là dello specchio, è chiaro, che l'immagine virtuale mn è maggiore dell'oggetto MN.

Supponiamo ora che c rappresenti il centro della pupilla acb, nella quale entrano i raggi ta, M'''c, t'b provenienti dal punto luminoso M, ed i raggi as, N'''c, s'b provenienti dall'altro punto luminoso N; e siccome questi raggi entrano nell'occhio con quella stessa divergenza, come se realmente venissero dai fochi immaginarj m, n, così nell'occhio si formerà un'immagine n''' m'''; il cui prototipo si giudicherà esistere in mn sul prolungamento degli assi ottici cm, cn; e l'angolo ottico mcn sarà la grandezza apparente del supposto oggetto mn.

Or avendo l'immagine virtuale mn la stessa posizione dell'oggetto MN, l'occhio vedrà la suddetta immagine in una posizione conforme a quella dell'oggetto.

Se l'occhio facesse parte dello stesso oggetto MN, come accade in un osservatore, che da vicino miri se stesso in uno specchio concavo, e fosse c' il centro della pupilla, ed MN la dimensione lineare del suo volto, allora, mn esprimerebbe l'immagine virtuale del volto umano, e non assumendo che i soli assi ottici per non ingombrare la figura con eccessivo numero di linee, l'occhio c' vedrà il vertice M del volto, e l'estremità N del mento per mezzo del raggio riflesso tc' proveniente da M, e dal raggio riflesso Sc' proveniente N. L'occhio adunque riferirà il vertice M della fronte in m, ed il mento N in n, e per conseguenza l'osservatore vedrà in mn la immagine virtuale di se stesso; ed essendo $mn > MN$ perchè l'oggetto, e l'immagine sono compresi fra gli stessi assi; è chiaro, che l'osservatore vedrà

il suo volto più grande di quello, che se si guardasse in uno specchio piano posto ad uguale distanza dal volto. Tutto ciò è confermato dalla sperienza.

Rispetto agli specchj convessi abbiamo già dimostrato (   ) che al crescer della distanza δ, cresce eziandio la lunghezza focale immaginaria; quindi non occorre d'intrattenermi più lungamente sopra di essi. Indicherò soltanto qualche cosa intorno alla visione degli oggetti per mezzo di questi specchi. Posto in c (fig.ª 26) il centro della pupilla acb non molto lungi dall'asse principale, non vi ha dubbio, che tra i moltissimi raggi di luce che partono dai punti estremi T, A dell'oggetto luminoso, la cui immagine virtuale è ht, assai di essi Hh, Tc'...... poco distanti dai rispettivi assi HH', TT', non si riflettano in modo, che divergendo entrino nella pupilla, e due di essi cioè h'c, t'c incrocicchiandosi nel centro c di quella non diventino gli assi ottici di due coni lucidi, che hanno per ba-

Fig.ª 26

se la pupilla, e per vertici i punti h, t dell'immagine virtuale.

Dal che rilevasi che l'occhio acb riferirà l'oggetto HT nel luogo della sua immagine virtuale ht, e lo vedrà sempre più piccolo di quello che lo vedrebbe ad ugual distanza in uno specchio piano ( ); e oltrecciò la maggior, o minor distanza dell'occhio dallo specchio, e la posizione di quello rispetto all'immagine virtuale ht influiscono manifestamente sulla diminuzione dell'angolo ottico hct, sotto cui l'occhio acb vede l'oggetto HT, o per meglio dire l'immagine di esso.

3°. Se $d=\frac{r}{2}$, sarà $2d=r$; quindi nello specchio concavo $f=\frac{2d}{0}=\infty$, vale a dire il foco o punto d'unione de' raggi laterali sul proprio asse trovasi a distanza infinita dallo specchio; dunque i raggi laterali saranno riflessi parallelamente al loro asse; dunque non si avrà realmente immagine alcuna dell'oggetto, a meno che non vogliasi concepirla formata, ed esisten-

-te a distanza infinita dallo specchio.

Queste conseguenze divengono ancor più manifeste per mezzo della seguente costruzione grafica. Sia C (fig.ª 27.ª) il centro dello specchio concavo PA'Q, ed nam un oggetto arcuato concentrico allo specchio, e distante dal medesimo in tutti i suoi punti della quantità nN' = aA' = mM' = ½CA' = ½r. I raggi luminosi nN', aA', mM' incidenti tutti sullo specchio nella direzione degli assi CN', CA', CM' siccome normali allo specchio verranno riflessi indietro sulle stesse direzioni N'CN, A'CA, M'CM incrocicchiandosi nel centro C. Ora io dico che i raggi laterali e prossimi a ciascun asse, cioè nN'', nN''', aA'', aA''', mM'', mM''' saranno riflessi sulle direzioni N''N, N'''N; A''A, A'''A; M''M, M'''M paralelle ai rispettivi assi NN', AA', MM'. Imperocchè condotto dal centro C ad un punto qualunque di incidenza per esempio N'' il cateto CN risulterà il triangolo CnN'', nel quale, attesa la vicinanza di N'' e di N', si ha prossimamente nN'' = nN'; ma per

Fig. 27

costruzione $nN = nC$; dunque $nN'' = nC$; e per conseguenza il triangolo nCN'' sarà isoscele, e si avrà ang. $nCN'' = nN''C$; ma dall'altra parte si ha ang. $N'nN'' = nCN'' + nN''C$; e per la legge di riflessione ang. $nN''C = CN''N$; dunque sostituendo sarà ang. $N'nN''$ = ang. $nN''C + CN''N$ = ang. $nN''N$. Dal che si vede che il raggio riflesso $N''N$ ha tal direzione rispetto all'asse $N'N$, che gli angoli alterni interni $N'nN''$, $nN''N$ sono uguali; quindi il raggio riflesso $N''N$ sarà parallelo all'asse $N'N$. Medesima dimostrazione per tutti gli altri raggi luminosi rispetto ai loro assi. In tal caso adunque i raggi laterali riflessi $N''N$, $N'''N$; $A''A$; $A'''A$; $M''M$, $M'''M$ non potranno incontrare i loro assi che a distanza infinita, e per conseguenza non si formerà immagine alcuna dell'oggetto luminoso nam, se pur non vogliasi supporla formata a distanza infinita: nel qual caso però deesi osservare, che essa acquisterà una dimensione MAN infinita rispetto all'oggetto nam, poichè i punti M, A, N della

supposta immagine devono esistere sopra gli stessi assi sui quali esistono i corrispondenti punti m, a, n dell'oggetto luminoso. Tutto ciò è confermato dalla formola (K) nella quale fatto $d = \frac{1}{2}r$, dà $g' = \frac{gr}{0} = \infty$.

In tale ipotesi qualunque sia la posizione dell'occhio, non potrà formarsi sulla retina di esso dipintura alcuna per mezzo de' raggi riflessi dallo specchio. Imperocchè la costruzione sua esigge, come abbiamo già accennato ( ); che i raggi di ciascun fascetto, o cono lucido entrino nella pupilla divergenti dai rispettivi assi ottici; quindi che entrandovi paralleli, l'unione di essi entro all'occhio si farà avanti la retina, e per conseguenza sopra di essa si formerà un'immagine confusa (*).

Negli specchi convessi la supposizione di

(*) Intorno alla visione delle immagini veggasi Haüy Tom. 2. pag. 343, e seg. ove trovansi alcune osservazioni importanti.

$\delta = \frac{1}{2}r$, dà $f = -\frac{r}{4}$, e la formola (L) diventa $g' = \frac{g}{2}$; quindi la dimensione dell'immagine sarà la metà di quella dell'oggetto. Infatti se nella (fig.ª 25) suppongasi l'oggetto HAT concentrico allo specchio, e che le distanze AA', HH' siano $= \frac{1}{2}CA' = \frac{r}{2}$, dall'equazione $f = -\frac{r}{4}$, si ha $A'a = H'h = T't = \frac{1}{4}CA' = \frac{r}{4}$ quindi a motivo de' triangoli simili Cht, CHT si ha CH : TH :: Ch : ht; ma CH $= CH' + H'H = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$; Ch $= CH' - H'h = r - \frac{r}{4} = \frac{3r}{4}$; quindi CH è doppio di Ch; dunque anche l'oggetto HT sarà doppio della sua immagine ht.

Fig.ª 25

4.º Se $\delta > \frac{r}{2}$, anche $2\delta > r$; quindi la formola $f = \frac{\delta r}{2\delta - r}$ è positiva. Dal che si vede che se l'oggetto è distante dallo specchio concavo più che il semiraggio, l'immagine è reale, ossia i raggi laterali riflessi si uniranno realmente in un punto del loro asse.

Convien però osservare, che se δ superi di poco $\frac{r}{2}$, il denominatore della frazione precedente sarà piccolissimo; quindi grandissimo sarà il valore della distanza focale f.

Se $\partial = r$, vale a dire, se l'oggetto ridotto a un sol punto pongasi esistente nel centro C dello specchio, la formola $f = \frac{\partial r}{2\partial - r}$ dà $f = r$, cioè il foco, o immagine dell'oggetto cadrà nel centro, e coinciderà coll'oggetto. Quindi se il centro della pupilla dell'osservatore esisterà nel centro C dello specchio, tutti i raggi luminosi che partono da essa cadranno sullo specchio sulla direzione de' raggi CH'', CH', CH'''..... e per conseguenza saranno tutti normali alla superficie concava BA'E; e verranno riflessi sulle direzioni de' raggi, e per conseguenza si uniranno in C. Dunque il centro dell'occhio collocato in C vedrà se stesso in tutti i punti dello specchio.

Negli specchi convessi l'ipotesi $\partial = r$, riduce la formola $f = \frac{-\partial r}{2\partial + r}$ a $f = \frac{-r}{3}$, cioè la distanza focale negativa uguale alla terza parte del raggio.

5°. Se $\partial > r$, allora nella formola $f = \frac{\partial}{2\partial - r} + r$, il fattore $\frac{\partial}{2\partial - r}$ è una frazione genuina; quindi la lunghezza focale f sarà minore del raggio r dello specchio.

6.° Finalmente se $d = \infty$. la formola (N) per gli specchj concavi diventa $f = \frac{r}{2} + \frac{r^2}{4\infty - 2r}$, dove si vede che il valore del secondo termine è evanescente; quindi $f = \frac{r}{2}$, cioè il foco di un oggetto luminoso a distanza infinita dello specchio uguaglia la metà del raggio. Simile è il risultato che si ottiene per gli specchj convessi.

A rischiarire questo risultato conviene riflettere, che quando un oggetto luminoso trovasi ad infinita distanza da uno specchio, allora tutti quei raggi che partendo dai diversi punti dell'oggetto possono cadere sull'ampiezza finita, e limitata dello specchio, sono fascetto per fascetto sensibilmente paralelli fra loro. Quindi se MAN (fig.^a 28) rappresenti un oggetto infinitamente distante dallo specchio PA'Q, tutti i raggi che dai punti M, A, N cadono nello specchio sono sensibilmente paralelli ai rispettivi assi MCM', ACA', NCN': Assumendo ora uno di questi raggi laterali p. e. NN" paralello, e vicinissimo all'asse NN', e condotto il cateto CN", quello

Fig.^a 28

verrà riflesso secondo nN'', cosicchè abbiasi ang. $NN''C = nN''C$, ed a motivo della picciolezza dell'arco $N'N''$, sarà $nN'' = nN'$ prossimamente. Ora a motivo delle parallele NN'', NN' si ha ang: $N'nN'' = nN'N = 2nN''C$; inoltre l'angolo esterno $N'nN'' =$ ang. $nCN'' + nN''C$; dunque ang. $2nN''C =$ ang: $nCN'' + nN''C$, e riducendo ang: $nN''C = nCN''$; donde si vede, che il triangolo CnN'' è isoscele, e per conseguenza $Cn = nN''$; ma $nN'' = nN'$; dunque $Cn = nN'$; dunque il foco, o concorso n dei raggi paralelli cade nella metà del raggio CN' dello specchio. Medesima dimostrazione per tutti gli altri raggi laterali, e vicinissimi ai rispettivi assi. Il foco dei raggi paralelli chiamasi *foco principale*.

Dal fin qui esposto generalmente si vede, che negli specchi concavi scostandosi l'oggetto dallo specchio di un sol semiraggio, l'immagine virtuale se ne allontana per la parte opposta da zero sino all'infinito; continuando a scostarsi l'oggetto di un altro semiraggio, l'immagine reale dall'infinita distanza si accosta al centro dello

specchio, ove si trova simultaneamente all'oggetto; e se lo scostamento dell'oggetto prosegua al di là del centro sino all'infinito, l'immagine reale lascia il centro, e si porta alla metà del raggio, e cade allora nel foco principale dello specchio.

Negli specchi convessi se l'oggetto si scosti dalle medesime quantità dallo specchio, l'immagine virtuale, sempre dalla parte opposta, primieramente se ne allontana da zero sino al quarto del raggio; poi dal quarto sino al terzo, ed infine dal terzo sino alla metà, cioè sino al foco principale immaginario.

Osser: Negli specchi concavi se i raggi cadono divergenti, ossia se la distanza δ non è infinita, il foco $f = \frac{r}{2-r}$ è $> \frac{r}{2}$ valore del foco principale: Se $\delta = \infty$, ossia se i raggi cadono paralelli, si ha $f = \frac{r}{2}$: considereremo fra poco il caso in cui i raggi incidenti sono convergenti; e si mostrerà che f è sempre $< \frac{r}{2}$.

L'Equazione generale (M) ridotta in proporzione dà $2\delta \pm r : \pm r :: \delta : f$; dividendo i termi-

ni del primo rapporto per 2 si avrà $d \pm \frac{r}{2} : \pm \frac{r}{2} :: d : f$; ma poichè $\frac{r}{2}$ esprime la lunghezza del foco principale, ossia de' raggi paralelli, fatto $\frac{r}{2} = p$, e sostituendo risulterà $d \pm p : \pm p :: d : f$; quindi $f = \frac{\pm pd}{d \mp p} = \frac{pd}{d \pm p}$ equazione che esprime la relazione fra il foco principale p, ed il foco particolare f corrispondente a una data distanza d.

Metodi pratici per determinare il foco principale, ed il raggio degli Specchi Concavi, e convessi.

Per gli specchj concavi. Rivolto lo specchio direttamente al Sole, o alla Luna si raccolga sopra un piano bianco, per esempio un pezzo di cartone coperto di carta bianca, l'immagine circolare di questi astri, i quali essendo a distanza pressocchè infinita rispetto al raggio dello specchio, avranno la loro immagine nel foco principale, ossia alla metà del raggio(   ). Per riconoscer poi quando nel piano dipingasi realmente l'immagine dell'astro, si avvicinerà, si accos-

terà; e si allontanerà il piano dallo specchio; nell'uno, e nell'altro caso l'immagine circolare diverrà sempre più grande, e più indecisa ne' limiti suoi; si osserverà quindi attentamente in qual posizione del piano l'immagine diventa minima, e meglio terminata, ed allora saremo certi che essa cade sul piano: la distanza fra il piano, e lo specchio darà con sufficiente approssimazione la lunghezza del foco principale, ossia la metà del raggio; quindi si conoscerà il raggio intero.

Fig.a 29

Sopra una lista GH (fig.a 29) di cartoncino la cui larghezza sia di poche linee, si tiri una retta nn', sulla quale si facciano due forellini m, m' distanti di alcuni pollici; divisa per metà in a la loro distanza m m', si addatti l'altra allo specchio in modo, che il punto di mezzo a coincida col centro A dell'ampiezza dello specchio KAL; in tal modo i due forellini m, m' saranno ugualmente distanti dall'indicato centro A. Ciò fatto si copra tutto il resto della super-

ficie dello specchio; e si rivolga l'asse AC direttamente al centro S del Sole: I raggi solari Sm; Sm' dai due forellini saranno riflessi verso il foco principale p: per mezzo di un piano bianco N si potrà determinare il sito in cui si riuniscono, e si misurerà la distanza pA dal centro dell'ampiezza specolare; in tal maniera si avrà il valore della metà del raggio.

La formola $f = \frac{pd}{d-p}$ somministra un altro mezzo facile per determinare il foco principale, e il raggio degli specchi concavi. Posta avanti lo specchio, e sul suo asse una candela accesa a tal distanza d, che ne risulti sopra un piano, o parete opposta un immagine reale, si misuri la distanza f dell'immagine dallo specchio, e la suddetta distanza d: determinati questi due valori si avrà la lunghezza del foco principale $p = \frac{fd}{f+d} = \frac{1}{2}r$.

Per gli specchj convessi. A determinare il foco principale degli specchi convessi, non altro mezzo può adoprarsi, che quello che in secondo luogo è stato esposto per gli specchj concavi. So-

Fig.a 30

pra una lastra metallica piana, o sopra un pezzo di cartone GH (fig.a 30), fatto centro in D si descrivano due circoli concentrici CC', BB', il secondo de' quali abbia per raggio DB = 2 DC. Sulla circonferenza minore CC' si facciano alcuni forellini, uno dei quali sia in C, indi rivolto direttamente al Sole l'asse OD dello specchio convesso KLN si collochi il piano GH in posizione normale all'asse OD, cosicchè esso passi pel centro D, e lo si accosti, e allontani allo specchio finchè il raggio incidente SCM si rifletta nel punto B della circonferenza maggiore BB'. Indi misurata col compasso la retta MC, e la MB, si ponga $MB = a$; $DC = CB = e$, sarà $MC = \sqrt{a^2 - e^2}$. Prolungando il raggio riflesso AB in senso opposto alla riflessione incontrerà l'asse nel foco principale F. Il cateto d'incidenza OMQ dividerà per metà l'angolo CMB formato dal raggio incidente, e riflesso, cosicchè (Geometria) si avrà $BM : MC :: BQ : QC$, ossia $BM + MC : MC :: BQ + QC : QC :: BC : QC$; e sostituiti i valori analitici $a + \sqrt{(a^2 - e^2)} : \sqrt{(a^2 - e^2)} :: e : QC = \frac{e\sqrt{(a^2 - e^2)}}{a + \sqrt{(a^2 - e^2)}}$. Abbas-

sando dal punto d'incidenza M la normale MP sull'asse; si avranno i due triangoli rettangoli simili OPM, MCQ, ne' quali si ha QC:MC::MP:PO; sostituiti i valori analitici, ed osservando che PM=CD =e risulta $PO = a + \surd(a^2-e^2) = BM + CM$. Ora nel triangolo rettangolo OPM si ha $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = 2a^2 + \surd(a^2-e^2)$ quindi estraendo la radice si avrà il valore del raggio dello specchio $OM = OL = \surd[2a^2 - 2\surd(a^2-e^2)]$; quindi sarà cognito eziandio il foco principale $LF = \frac{1}{2} OL$.

Determinazione dei Fochi dei raggi convergenti verso gli Specchi Sferici

Fin qui abbiam sempre supposto, che i raggi incidenti sugli specchj fossero o divergenti dai loro assi, o ad essi paralelli. Ma qualora per arte, o per natura i raggi P'A', PA, P"A" (fig.a 31) fossero convergenti in M, e formassero un cono lucido il cui asse coincidesse coll'asse PA dello specchio concavo questi raggi dopo la riflessione in A', A, A" si uniranno in un punto, o foco reale n,

Fig.a 31

nel quale virtualmente si unirebbero i raggi MA', MA, MA", supposto che partissero dal punto M di concorso de' raggi convergenti, e cadessero sulla superficie convessa di uno specchio sulla direzione stessa de' raggi P'A', P"A". Donde si vede che per determinare il foco reale n de' raggi convergenti in uno specchio concavo, basta trovare il foco, o immagine virtuale n del punto di concorso M de' raggi convergenti risguardato come oggetto rispetto ad uno specchio convesso avente lo stesso raggio di curvatura che lo specchio concavo. Quindi la retta MA esprimerà la distanza δ; $\underline{An}$ la lunghezza focale positiva f; CA il raggio r; e si avrà $An = f = \frac{+\delta r}{2\delta + r} = \frac{\delta r}{r + 2\delta}$.

Dividendo per δ i termini di questa formola si ha $f = \frac{r}{2 + r}$ quantità che qualunque sia il valore della distanza δ, è sempre $< \frac{r}{2}$, minore cioè del foco principale formato dai raggi paralleli, a meno che non si ponga AM $= \delta = \infty$ poichè allora i raggi P'A', P"A" diverebbero paralleli.

Se la convergenza de' raggi ottengasi o per

mezzo di uno specchio concavo, o mediante una lente convessa P'PP", basta conoscere la lunghezza focale PM dello specchio, o della lente, e conoscere la distanza PA tra questa, e lo specchietto M concavo, per avere la distanza AM = d tra il punto di concorso M, e lo specchio suddetto.

Quando si conosce l'angolo di convergenza P'MA, che formano i raggi convergenti all'asse dello specchio, e la distanza AA' fra il punto d'incidenza d'uno di essi, ed il punto A per cui passa l'asse, si potrà determinare facilmente anche l'ideale distanza MA: imperocchè considerando l'archetto A'A come una retta normale all'asse, e misuratone la lunghezza si avrà un triangolo rettangolo MAA' nel quale si conosce il lato AA', e l'angolo di convergenza A'MA; quindi con facil calcolo si determinerà la distanza MA.

Applicando questi ragionamenti ai raggi P'A', P"A" (fig.ª 32) convergenti verso uno specchio convesso A'AA", e riflessi sulle direzioni A'M', A"M", si vedrà chiaro, che il loro punto di concorso, o foco

Fig.ª 32

virtuale n di questi raggi riflessi coincide col foco reale che verrebbe formato dai raggi che partissero dal punto M concorso dei raggi incidenti P'A', P''A'', e cadessero sulla superficie concava di uno specchio ne' dati punti precisamente d'incidenza A', A, A''. Tutta l'operazione adunque riducesi a determinare la distanza focale positiva An del punto di concorso M considerato come oggetto per riguardo ad uno specchio concavo avente lo stesso raggio che lo specchio convesso, e di prender in seguito questo valore negativamente.

Determinata adunque come sopra la distanza fittizia MA = ∂, si troverà An = $f = \frac{-\partial r}{2\partial - r} = \frac{\partial r}{r - 2\partial} = \frac{r}{\frac{r}{\partial} - 2}$. Questa formola si riduce a infinito se abbiasi il denominatore $r - 2\partial = 0$, ossia $\partial = \frac{r}{2}$, onde si vede che se il punto di concorso M cade nella metà del raggio dello specchio convesso ove giace il foco principale negativo, i raggi convergenti saranno riflessi dallo specchio paralleli fra loro onde $f = \infty$. Insino che si ha $r > 2\partial$, ossia $\partial < \frac{r}{2}$ il foco sarà sempre positivo, o reale; che se $r < 2\partial$, e

per conseguenza $d > \frac{r}{2}$ f è negativo, e per conseguenza i raggi che cadono convergenti sullo specchio, da esso sono riflessi divergenti.

Riunendo queste due formole si avrà $f = \frac{dr}{r \pm 2d}$ (O) nuova formola pei raggi convergenti, dalla quale potranno dedursi conseguenze simili a quelle della prima, avvertendo sempre, che il segno − è relativo agli specchi convessi, e che la distanza d esprime sempre la distanza del punto di concorso de' raggi convergenti considerato come oggetto dalla superficie dello specchio. Senza ch'io l'avverta è per se stesso evidente che il suddetto punto di concorso esiste sempre al di là della superficie speculare.

Risolvendo in proporzione la formola (O) si avrà $r \pm 2d : r :: d : f$; ossia $\frac{r}{2} \pm d : \frac{r}{2} :: d : f$; ma $\frac{r}{2}$ esprime la distanza del foco principale p degli specchi; dunque $p \pm d : p :: d : f$; quindi $f = \frac{pd}{\pm d + p}$.

Costruzione Grafica
delle formole $f = \frac{pd}{\pm d + p}$; $f = \frac{pd}{\pm d - p}$.

Gli specchi concavi, o convessi di cui si fa uso

nelle sperienze delicate, e negli stromenti Catottrici hanno per lo più piccolissima ampiezza; onde tutti i raggi luminosi che cadono sopra di essi possono a diritto considerarsi uniti in un sol punto fisico. Il celebre Sig.r Short d'Edimbourg non ha mai dato agli specchj de' suoi telescopj un'ampiezza maggiore di 8 gradi. I soli specchi ustorj, siccome non destinati ad effetti precisi, amettono un'ampiezza maggiore, e che può esser portata sino a 24°. come fra poco si dimostrerà.

Supposta adunque piccola l'ampiezza DCD' (fig.a 33) dello specchio, ognun vede che la semiampiezza arcuale DC può considerarsi senza error sensibile come una linea retta normale all'asse principale CM.

Fig.a 33

Ciò posto se il punto luminoso A posto sull'asse principale dello specchio concavo DCD', suppongasi da esso distante più che il raggio KC, si formerà (   ) in un punto I l'immagine reale di A, e si avrà CI. $= f = \frac{pd}{d-p}$. Per costruire questa formola s'innalza dal punto A in cui tro-

vasi l'oggetto la retta indefinita AB normale all'asse al dissopra, o al dissotto del medesimo. Diviso per metà il raggio KC si avrà il foco principale F. Per l'estremità D dello specchio, e per F si tiri la retta FD prolungata sino all'incontro B colla normale AB. Da B al centro K si tiri l'indefinita BK, e dall'estremità D si conduca la DG parallella all'asse, ed incontrante in G la BK. Abbassata da G la GL normale all'asse; il punto L sarà il foco, o il luogo dell'immagine reale del punto luminoso A.

Infatti essendo CD sensibilmente rettilinea, e normale all'asse CM, i due triangoli rettangoli DCF, FAB saranno simili, e simili eziandio saranno i due triangoli BFK, BDG; quindi BF : BD :: FK : DG, ossia CL. Ma FB : DF :: FA : FC, ossia FB : BF + DF :: FA : FA + FC, cioè BF : BD :: FA : CA, quindi comparando le proporzioni si avrà FA : AC :: FK : CL. Ora poichè AC esprime la distanza d dell'oggetto dallo specchio, e KC il raggio r, e FC = FK il foco principale p, si avrà FA = AC − FC =

$\partial - p$; quindi sostituendo nell'ultima proporzione si avrà $\partial - p : \partial :: p : CL = \frac{\partial p}{\partial - p}$.

Se l'oggetto A' esista fra il centro K, ed il foco principale F, l'immagine dell'oggetto ancor reale, ed il foco sarà espressa al solito da $f = \frac{\partial p}{\partial - p}$, e si determinerà il punto L' in cui ella cade conducendo pel luogo A' dell'oggetto, la normale A'B', indi condotta per B', e pel centro K la retta B'K prolungata sino all'incontro G' colla DG' parallela all'asse, si abbasserà la G'L' normale all'asse. Il punto L' sarà il foco, o il luogo dell'immagine del punto luminoso A'. La somiglianza de' triangoli FCD, FA'B'; B'FK, B'DG' conduce ad un risultato analogo al precedente.

Se il punto luminoso esista in A'' a minor distanza dello specchio di quello che sia la distanza focale principale CF, l'immagine, o foco dell'oggetto sarà negativo, e dovrà cadere( ) al di là dello specchio in un punto L''. Per determinare questo punto, innalzo da A'' la A''B'' normale all'asse, e che incontra in B'' la FD condot-

ta dal foco principale all'estremità dello specchio. Pel centro K dello specchio, e pel punto B'' faccio passare la retta indefinita KB'', che taglierà in G'' la DG parallella all'asse; abbasso da G'' la G''L'' normale all'asse, ed ho in L'' il foco negativo cercato.

Infatti i triangoli simili B''FK, B''G''D danno B''F : B''D :: FK : DG''; ossia CL''. Ed a motivo degli altri due triangoli FB''A'', FCD, si ha FB'' : DB'' :: FA'' : A''C; dunque si avrà altresì FA'' : A''C :: FK : CL''; ma FA'' = FC − A''C = $p-d$; FK = CF = p; dunque CL'' = $f = -\frac{dp}{p-d} = \frac{dp}{d-p}$.

Passiamo ora agli specchi convessi, e supponiamo che sull'asse AK (fig.^a 34) dello specchio CD esista in A un punto luminoso, di cui debbasi trovare il foco immaginario. Innalzo a tal fine dal punto A l'indefinita AB normale all'asse, ed avendo diviso per metà in F il raggio KC dello specchio, conduco pel foco principale F, e per l'estremità D dello specchio l'indefinita FB, che incontrerà in B la normale AB. Dal centro K tiro al punto B la retta KB che taglierà in G la retta DG condotta dall'estremità D dello specchio

Fig.^a 34

parallelamente all'asse. Finalmente da G abbasso GL normale all'asse, ed ho nel punto L il foco immaginario cercato.

Imperocchè i triangoli simili BGD, BKF danno BF:BD::KF:DG, ossia CL, giacchè CD è sensibilmente rettilinea, e normale all'asse. Inoltre i due triangoli simili FCD, FAB danno BF:BD:: FA:CA; dunque FA:CA::FK:LC; ma FA = AC + CF = $\partial + p$; CA = ∂; KF = CF = p; quindi il foco negativo LC = $-f = -\frac{\partial p}{\partial + p} = \frac{\partial p}{-\partial - p}$.

Caustiche di Riflessione.

Abbiamo altrove indicato (   ) che i raggi luminosi troppo divergenti dall'asse non possono concorrere nel foco de' raggi sensibilmente normali allo specchio, ma che incontran l'asse in diversi punti tanto più vicini allo specchio, quanto il punto d'incidenza è più lontano dall'asse.

Per dimostrare questa verità suppongo che vi siano due raggi PB, PG (fig.a 35) il primo vicinissimo all'asse PA dello specchio sferico concavo

Fig.a 35

GAG'; l'altro notabilmente lontano, e divergente dall'asse suddetto. Il primo siccome sensibilmente normale allo specchio ( ) verrà riflesso nel foco reale f, la cui lunghezza fA vien determinata dalla solita formola ( ). Ma l'altro raggio PG dopo la riflessione incontrerà l'asse PA in un punto m più vicino allo specchio che il foco f, cosicchè si avrà $Cf < Cm$, e per conseguenza $Af > Am$.

Infatti se si volesse supporre che il raggio PG sia riflesso in f, ossia che il punto m cadesse in f, allora condotti dal centro C i due cateti d'incidenza CG, CB, e dal foco f le rette fG, fB si avrà 1.° $fG > fB$; $PB > PG$; 2.° si avrebbe ang: $PGC = CGf$; ang. $PBC = CBf$; e poichè i cateti d'incidenza dividono per metà gli angoli PGf, PBf, si avranno le proporzioni $PB : Bf :: CP : Cf = CP \times \frac{Bf}{PB}$.

$$PG : Gf :: CP : Cf, \text{ o } Cm = CP \times \frac{Gf}{PG}.$$

Esaminando i due valori di Cf, e di Cm si vedrà che essendo $Bf < Gf$; e $PB > PG$, Cf sarà necessariamente $< Cm$; e che per conseguenza assurda è l'ipotesi fatta intorno alla coincidenza del pun-

to m col foco f. D'onde si vede che il raggio PG sensibilmente divergente dall'asse dopo la riflessione lo taglierà in un punto m più vicino allo specchio che il foco f dei raggi sensibilmente normali.

Segue da ciò, che tutti i raggi incidenti sullo specchio nei punti compresi fra B, e G dopo la riflessione incontreranno l'asse PA tra il foco f, ed il punto m, e che quanto meno i raggi incidenti divergono dall'asse PA, tanto più i raggi riflessi si accosteranno al foco f.

Condotti tutti i raggi riflessi Gg, Fφ, Ee, Dd, Cc...... se pel foco f de' raggi normali allo specchio si faccia passare una curva, la quale tocchi in c, d, e, φ, g...... gli accennati raggi riflessi, si avrà quella curva, che appellasi caustica di riflessione. Egli è manifesto 1.° Che questa curva può considerarsi come una serie di fochi formati dal concorso dei raggi riflessi, infinitamente vicini, e presi due a due. 2.° Che tutti i raggi riflessi sono altrettante tangenti alla caustica di riflessione.

La soluzione del seguente Problema presen-

terà alcuni principj generali della teoria delle caustiche di riflessione. I prescritti limiti di brevità non mi permettono di entrare in minute particolarità intorno ad esse.

Probl. Data la natura, o l'equazione della curva riflettente GAG', sulla quale cadono i raggi di luce dal punto luminoso P, e dato il raggio di curvatura CG condotto al punto d'incidenza G, trovare la retta Gφ, ossia il punto φ in cui il raggio riflesso Gφm tocca la caustica di riflessione fcdφg.

Soluz. Prendiamo il raggio incidente PF, infinitamente vicino al raggio PG, e dal centro C dell'arco osculatore la curva concava riflettente nel tratto infinitesimo GF, si abbassino sui due raggi le normali Cg'; Cf'.

I due raggi riflessi, ed infinitamente vicini Gφ, Fφ si uniranno in φ, e formeranno un foco parziale, che sarà uno dei punti della caustica.

Dallo stesso centro C si abbassino sui due raggi riflessi prolungati le normali Cg''; Cf''; indi

dai punti P, ed Q come centri coi raggi PG, QG si descrivano gli archi infinitesimi GR, GO. Il raggio osculatore CG siccome normale all'arco infinitesimo GF, formerà con quello l'angolo retto CGF; per la stessa ragione saranno retti pur anche gli angoli PGR, QGO. Quindi tolto l'angolo comune RGC rimarà ang: PGC = RGF. Similmente se dagli angoli retti QGO, CGF si tolga l'angolo comune QGF rimarrà ang: OGF = CGQ.

Ciò posto per le leggi di riflessione si ha l'angolo d'incidenza PGC = CGQ; dunque ang. CGQ = OGF = PGC = RGF. Ora i due triangoli rettangoli GRF, GOF, siccome rettangoli ed aventi il lato comune GF, e gli angoli adjacenti in G uguali, sono manifestamente uguali; quindi si avrà GR = GO, e RF = FO.

Oltreciò si hanno i triangoli simili Pg'h', PGR; QGO, Qg''h''. I due triangoli CGg', CGg'' rettangoli in g', g'', aventi il lato comune CG, e gli angoli in G uguali, sono uguali fra loro; quindi sarà Cg' = Cg''. Similmente si dimostrerà l'ugua-

glianza dei due triangoli rettangoli $Cf'E$, $Cf''E$, d'onde risulterà $Cf''=Cf'$. Ed a motivo dell'estrema vicinanza de' raggi incidenti, e de' riflessi, i punti f', f'' saranno infinitamente vicini ad h', h'', cosicchè si avrà $Cf'=Ch'$; $Cf''=Ch''$; quindi $Ch'=Ch''$, e $Cg'-Ch'=Cg''-Ch''$; e per conseguenza $h'g'=h''g''$. Per la stessa ragione si avrà $\varphi g''=\varphi h''$.

Ciò posto faccio $PG=\delta$; $Gg'=Gg''=a$; $G\varphi=\varphi$; arc. GR = arc. $GO=m$; $g'h'=g''h''=t$, d'onde risulta $Pg'=PG-Gg'=\delta-a$. I due triangoli simili $Pg'h'$, PGR danno $PGC(\delta):Pg'(\delta-a)::GR(m):h'g'(t)$; quindi $m=\frac{\delta t}{\delta-a}$.

Dagli altri due triangoli simili φGO, $\varphi g''h''$ si ha $G\varphi:GO::\varphi g''$, o $\varphi h'':h''g''$; ovvero $G\varphi:\varphi g''::GO:h''g''$; quindi $G\varphi+\varphi g'':G\varphi::GO+h''g'':GO$; ma $G\varphi+\varphi g''=Gg''=Gg'=a$; dunque sostituiti i valori analitici si avrà $a:\varphi::m+t:m$, quindi $m=\frac{t\varphi}{a-\varphi}$.

Paragonando i due valori di m, si troverà $\varphi=\frac{\delta a}{2\delta-a}$ (Q) formola generale che determina il punto d'incontro φ di due raggi infinitamente vicini, ossia un punto della caustica; quando

si conosca la distanza δ del punto luminoso P dal punto d'incidenza G, e la porzione $\underline{a}$ del raggio compresa fra il punto d'incidenza G, ed il piede g' della normale abbassata dal centro C di curvatura sul raggio incidente PG.

Se la curva riflettente GFA presentasse in vece della concavità, come fin qui abbiam supposto, la sua convessità al punto luminoso P, allora la distanza $\delta = PG$ avrebbe una posizione opposta alla precedente rispetto al raggio osculatore CG; quindi restando lo stesso tutto il processo delle operazioni, non si dovrebbe far altro che prendere negativamente la distanza δ, e la equazione (Q) si trasformarebbe in $\varphi = \frac{\delta a}{2\delta + a}$ (R) formola generale rispetto alle caustiche di riflessione per le superficie convesse.

Se il punto P è infinitamente distante dal punto d'incidenza G, cosicchè abbiasi $PG = \delta = \infty$, i raggi luminosi saranno paralleli, e le formole (Q) (R) danno $\varphi = \frac{1}{2}a$, $\varphi = \frac{1}{2}a$, vale a dire $G\varphi = \frac{1}{2}Gg'$; quindi il φ della caustica sarà dis-

tante dal punto d'incidenza G quanto è la metà della distanza fra G, ed il piede g' della normale. E se la curva AFG non si estende oltre il punto G, è chiaro che il punto Q sarà l'estremità della caustica.

Ma se suppongasi che la curva riflettente FG sia prolungata sino in Z, cosicchè il raggio incidente PZ coincida colla tangente ZT, questo raggio rimarrà aderente alla superficie di riflessione, non potrà essere riflesso, nè per conseguenza allontanato dalla superficie specolare: lo stesso dicasi di un raggio a lui infinitamente vicino: il concorso adunque di questi due raggi esisterà nella superficie riflettente, e per conseguenza la caustica di riflessione toccherà in questo caso la curva riflettente nel punto Z.

La verità di questa conseguenza viene pienamente confermata dalla formola $Q = \frac{\delta a}{2\delta - a}$. Imperocchè quando il raggio incidente PZ è tangente la curva nel punto d'incidenza, il piede della normale CZ abbassata dal centro di curva-

tura coincide col punto d'incidenza; quindi la distanza di questi due punti espressa da a sarà $= o$, dal che risulta $\varphi = \frac{o}{2\delta} = o$, nulla cioè la distanza fra il punto d'incidenza, e il corrispondente punto della caustica; quindi la caustica toccherà la superficie specolare in Z.

Poichè il raggio incidente in G tocca la caustica in φ, ed il raggio incidente in Z la tocca nel punto stesso d'incidenza Z, ognun vede che i raggi incidenti tra G, e Z toccheranno la caustica nei punti compresi fra φ, e Z, accostandosi sempre più alla superficie specolare, quanto i punti d'incidenza saranno più vicino all'estremo Z. D'onde si vede, che nel caso da noi contemplato, la caustica partirà dal foco f de' raggi normali provenienti da P, ed incurvandosi si estenderà sino al punto Z. I Raggi luminosi che da P cadono sull'altra porzione A'G' dello specchio formeranno essi pure un altro ramo della caustica, il quale sarà simile, ed uguale all'altro ramo fφZ se la superficie specolare AD'G'..... sa-

rà simile, ed uguale alla superficie ADG......

Per fare qualche utile applicazione delle precedenti considerazioni a qualche caso particolare; suppongo che AED (fig.ª 36) rappresenti un semicircolo concavo specolare, sul quale cadano raggi luminosi paralelli all'asse EC. Supposto che BM rappresenti uno di questi raggi incidenti, tiro dal centro C al punto M il cateto, o raggio CM, ed il diametro AD, che sarà evidentemente normale all'asse CE., e a tutti i raggi incidenti. Dal punto d'incidenza M tiro una retta FM, in modo che si abbia ang. FMC = ang. BMC: questa retta esprimerà il raggio riflesso. Divido per metà il raggio CM in H, dal quale tiro sul raggio incidente BM la normale HK; con ciò la retta BM rimarrà divisa per metà in K; e poiche nell'ipotesi de' raggi (   ) la distanza frà il punto della caustica, e quello d'incidenza M è la metà della porzione BM del raggio incidente compresa fra la normale, ed il punto d'incidenza, è chia-

Fig.ª 36

ro, che presa MF = MK = $\frac{1}{2}$ MB, il punto F apparterrà alla caustica.

Condotta HK parallella ad AC, e la retta HF; i due triangoli KMH, MHF saranno uguali; poichè hanno il lato comune MH, gli angoli in M uguali, e per costruzione MK = MF; quindi 1°. ang. HFM sarà retto, perchè uguale ad HKM, e per conseguenza HF normale al raggio riflesso MF nel punto della caustica. 2°. Condotta per F, e K la indefinita FKQ essa sarà normale in T al cateto d'incidenza CM.

Abbassata da F la FP normale al diametro DA, risulteranno i quattro triangoli simili MKT, MBC, KBQ, BQ, ne' quali fatto il raggio MC = r, la porzione del raggio incidente MB = a; MK = KB = MF = $\frac{1}{2}$ a, la normale BC = x, FR = CP = z, FP = RC = v, si avranno le seguenti analogie. $MC(r) : BC(x) :: MK\left(\frac{1}{2}a\right) : KT = \frac{ax}{2r}$; quindi $KF = 2KT = \frac{ax}{r}$; $BC(x) : MC(r) :: KB\left(\frac{1}{2}a\right) : KQ = \frac{ar}{2x}$; $KQ\left(\frac{ar}{2x}\right) : KB\left(\frac{1}{2}a\right) :: QF\left[= QK + KF = \frac{a(r^2+2x^2)}{2rx}\right] : FP = v = \frac{a(r^2+2x^2)}{2r^2}$ (S). $MC(r) : MB(a) :: QF : QP :$

KF′ $\left(\frac{ax}{r}\right)$: KS $=$ BP $=\frac{a^2x}{r^2}$, d'onde risulta PC $=$ BC $-$ PB $=x-\frac{a^2x}{r^2}=\frac{x(r^2-a^2)}{r^2}$ (T′) $=$ FR $=z$.

Per la natura del circolo si ha $\overline{MB}^2=\overline{CM}^2-\overline{CB}^2$, ossia $a^2=r^2-x^2$; quindi $x^2=r^2-a^2$. Sostituito questo valore in (T′) sarà $z=\frac{x^3}{r^2}$, ed $x=\sqrt[3]{r^2z}$, ed $x^2=r\sqrt[3]{rz^2}$. Sostituito questo valore nell'equazione $a^2=r^2-x$ si ha $a^2=r^2-r\sqrt[3]{rz^2}$; quindi $a=\pm\sqrt{r^2-r\sqrt{rz}}$.

Sostituiti questi valori di a, e di x nella equazione (S) si troverà $v=\frac{\sqrt{r^2-r\sqrt[3]{rz^2}}\times(r-2\sqrt[3]{rz^2})}{2r}$ (V) equazione della caustica di riflessione relativa ai raggi paralelli, ed alla sfericità dello specchio riflettente. L'origine delle coordinate ortogonali CP $=z$, PF $=v$ cade nel centro C dello specchio sferico.

Supposto che il raggio incidente BM sia infinitamente vicino all'asse CE dello specchio, si avrà CP $=z=0$; quindi la formola (V) si ridurrà a $V=\frac{\sqrt{(r^2)}\cdot r}{2r}=\frac{r}{2}=$ CO, vale a dire la caustica cadrà in O metà del raggio CE, il che s'accorda colla teoria generale del foco dei raggi paralelli.

Ma se suppongasi che un raggio cada nell'estremità A del semicircolo specolare AED, allora la direzione del raggio incidente coincide nell'ipotesi assunta colla tangente della curva in A; si avrà dunque l'ascissa $CA = z = r$; e la formola (V) diventa $v = \frac{0}{2r} = 0$. Quindi la caustica toccherà l'arco semicircolare nel punto A, il che è conforme ai risultati generali precedentemente ottenuti.

Si potrebbe facilmente dimostrare, che la caustica AEO rappresentata dalla equazione (V) è una epicicloide il cui circolo genitore che ha per raggio $\frac{r}{2}$ si avvolge sopra la circonferenza di un circolo descritto dal centro C con un raggio $= \frac{1}{2} r$; ma tali disquisizioni oltrecchè esigerebbero un mediocre apparato di calcolo, non sono d'altronde tanto importanti da meritar luogo in un trattato elementare.

Giova piuttosto osservare, che se l'oggetto luminoso è esteso, ciascun punto di esso avrà il suo foco, ed una caustica particolare. 2.° Che se

nelle formole $\varphi = \frac{\delta a}{2\delta - a}$; $\varphi = \frac{\delta a}{2\delta + a}$ suppongasi il raggio incidente PG (fig.^a 35) nella posizione PB, vale a dire infinitamente vicino all'asse PA di uno specchio sferico, allora abbassata dal centro la normale Cn, si avrà il raggio intercetto $nB = a = r$; quindi le due precedenti espressioni prenderanno la forma $\varphi = \frac{\delta r}{2\delta - r}$; $\varphi = \frac{\delta r}{2\delta + r}$; e saranno per conseguenza identiche a quelle che per altri metodi abbiamo ottenuto per esprimere le lunghezze focali relative ai raggi di luce sensibilmente normali alla superficie degli specchi sferici (   ).

Specchi Ustorij

Questi specchi sono con tal nome appellati, perchè riunendosi i raggi ardenti del Sole verso il loro foco principale ove trovansi collocate sostanze combustibili vengono esse infiammate, o liquefatte, o ossidate sino alla vetrificazione, e poiche i soli specchi concavi sono capaci di tali effetti, mentre essi soli fanno convergere, e

riducono in un foco reale i raggi paralelli del Sole (   ), che gli specchi convessi cangiano in divergenti; sia lo specchio sferico concavo GAG' il cui asse AP sia rivolto al centro del Sole, cosicchè uno de' raggi che partono dal suddetto centro cada sulla estremità G dello specchio con direzione P'G paralella all'asse PA. Si è dimostrato (   ) che questo raggio se sia molto lontano dall'asse PA, non anderà dopo la riflessione al foco principale f, ma a qualche punto inferiore m', di cui si avrà la posizione se si determini qual parte del raggio CA è la retta fm' occupata dai raggi riflessi di tutto lo specchio GDAG'. Fatto pertanto il raggio, o cateto d'incidenza CG = CA = 1, e posto l'angolo d'incidenza P'GC = CGm' = n, ed osservando che a motivo delle paralelle PA, P'G, ang: P'GC = GCm' = n, il triangolo CGm' sarà isoscele, e l'angolo Cm'G sarà supplemento degli angoli m'CG + CGm' = 2CGm' = 2n, e però sen. Cm'G = sen. 2n. Ora dalla trigonometria si ha CG : Cm' :: sen Cm'G :

sen. CGm'; ossia 1 : Cm' :: sen 2n : sen n; quindi Cm' = $\frac{sen.n}{sen.2n} = \frac{sen.n}{2.sen.n.cos\,n} = \frac{1}{2cos\,n}$.

Ciò posto siccome f esprime il foco principale dello specchio, sarà $Cf = fA = \frac{CA}{2} = \frac{1}{2}$; quindi $fm' = Cm' - Cf = \frac{1}{2cos\,n} - \frac{1}{2} = \frac{1-cos\,n}{2\,cos\,n} = \frac{sen^2 \frac{1}{2} n}{cos\,n}$: onde calcolando questo rotto sarà nota in parti del raggio CA = 1 la cercata fm'; nei diversi punti della quale passano i raggi riflessi dai diversi punti dello specchio compresi fra A, e G. Così se l'angolo d'incidenza P'GC = n sia di 60° si troverà $fm' = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$CA; e poiché anche fA = $\frac{1}{2}$CA, è chiaro che il punto m' cadrà sullo specchio nel centro A dell'ampiezza circolare. Se l'angolo d'incidenza n è = 10', = 20', = 30', ... = 90', si avrà per fm' un valore sì piccolo, che senza error sensibile potrà considerarsi zero; quindi il raggio riflesso cadrà in f, come già si sapeva (   ), e se n = 3°, si troverà $fm' = 0{,}000686 = \frac{1}{1458}$, di modo che più piccola sarà l'ampiezza, o apertura dello specchio, dalla quale dipende il maggior, o minor valore di fm', i raggi riflessi incontreranno l'asse sempre più da vicino al foco principale f. Ma siccome col diminui-

re l'ampiezza dello specchio scema il numero de' raggi riflessi; e perciò anche la loro attività; determiniamo ora sino a qual segno possa estendersi l'ampiezza di uno specchio sferico, onde ristretto più che si può lo spazio fin' entro cui cadono i raggi riflessi, possa ottenersi il massimo effetto possibile.

Fig.a 28

Siano MM', AA', NN' (fig.a 28) i raggi che partono dalle estremità M, N, e dal centro A del disco solare, il cui diametro rappresentato dalla retta MN si suppone normale all'asse dello specchio diretto al centro A del Sole. L'immagine solare sarà dipinta da' raggi normali allo specchio, e sarà compresa frà gli assi estremi MM', NN'; essa adunque occuperà lo spazio nam, ed nm esprimerà il suo diametro, il quale sarà sensibilmente rettilineo, normale all'asse, e da esso diviso per metà in a (   ). Inoltre la distanza focale A'a sarà $= \frac{1}{2}$ CA: L'angolo MCN = M'CN misura apparente del diametro solare = 32'; quindi ang. ACN = A'CN = 16'.

Ciò posto sebbene la formazione dell'immagine nam non provenga che da' raggi vicinissimi;

e paralelli a' loro assi, è chiaro però che alcuni di questi raggi sebbene un poco lontani dai rispettivi assi, pure dopo la riflessione si dirigeranno a qualche punto dell'immagine nm, diverso però da quello che rappresenta l'immagine del punto luminoso da cui sono partiti. Tale a cagion d'esempio è il raggio AA^{IV}, che partendo dal centro solare A, cade in A^{IV}, e dopo la riflessione taglia l'asse in e, ed incontra l'immagine nell'estremità n, e non in a ove pure dovrebbe cadere per rendere più distinta, e vivida l'immagine a del centro Solare. Questo raggio adunque sebbene pernicioso alla distinzione dell'immagine, sarà però utile ad aumentare l'intensità, e quantità di luce nel punto n; esso adunque concorrerà a render più energico l'effetto dello specchio ustorio. Egli è inoltre visibile, che il proposto raggio AA^{IV} è l'ultimo di quelli, che partendo dal centro solare, possono riflettersi entro lo spazio occupato dalla immagine mn, e che per conseguenza lo specchio ustorio dovrà estendersi sino in A^{IV} ultimo de' punti utili d'incidenza ris-

petto al centro del Sole.

Ma rispetto al bordo, o estremità M del diametro solare, la cui immagine è dipinta in m, è chiaro che uno frà gl'infiniti raggi che vengono da M per esempio il raggio MQ, dopo la riflessione potrà riflettersi sull'estremo opposto n dell'immagine solare mn; e che tutti i raggi luminosi provenienti da M, ed incidenti sullo specchio fra il piede M' dell'asse MM', ed il suddetto punto Q, saranno tutti riflessi entro lo spazio occupato dall'immagine nm; dunque il punto Q dello specchio sarà l'ultimo dei punti utili d'incidenza rispetto all'estremità M del disco solare, e per conseguenza non vi potrà essere sullo specchio verun altro punto d'utile incidenza più rimoto dall'asse principale, che il punto Q. Presa adunque dall'altra parte dell'asse principale A'C l'arco A'P=A'Q, si avrà la massima ampiezza arcuale FA'Q che possa attribuirsi allo specchio, giacchè non vi sarà punto d'incidenza sopra di essa, che non rifletta o molti, o qualche raggio di luce sopra lo spazio occupato dall'immagine mn.

Per determinare il numero de' gradi che attribuirsi debbono alla semiampiezza A'Q dello specchio ustorio PA'Q, osservo, che a motivo della nota legge di riflessione, e del parallellismo dei raggi MM', MQ si ha ang. $nQC = CQM = QCm = n$; inoltre l'angolo $nCm = NCM = 32'$; quindi ang; $nCQ = nCm + mCQ = 32' + n$; e poichè la cercata semiampiezza arcuale A'Q corrisponde all'angolo $A'CQ = A'Cm + mCQ = 16' + n$, è chiaro, che essa verrà determinata quando si possa conoscere l'angolo d'incidenza n.

A tal fine si osservi che nel triangolo QCn, si ha il lato $CQ = r$, $Cn = \frac{1}{2}r$, l'angolo $nCQ = 32' + n$, l'angolo $CQn = n$, e perciò il terzo angolo $CnQ = 180° - 32' - 2n$, e perciò $CQ(r) : Cn(\frac{r}{2}) :: sen(180° - 32' - 2n) : sen\, n :: sen(32' + 2n) : sen\, n$, si avrà $sen\, n = \frac{sen(32' + 2n)}{2}$ equazione, che risoluta col metodo delle false posizioni darà $n = 11°, 45'$ prossimamente. Laonde il semiasse A'Q sarà $= 16' + 11°, 45' = 12°, 1'$ prossimamente, e l'ampiezza intera $PA'Q = 24° 2'$. Da tutto ciò vuolsi conchiudere, che uno specchio ustorio sferico produrrà il massimo effetto possibile quando abbia

un'ampiezza di 24°2'.

Rimane ad osservare che tutti gli specchi ustorj di 24° producono un eguale condensamento di luce, qualunque sia il loro diametro. Poichè se per una parte quelli che lo hanno più piccolo, come lo specchio ptq (fig.ª 37) ricevono un minor numero di raggi dal disco solare MEN; per l'altra però gli uniscono in uno spazio men proporzionatamente minore, cosicchè esprimendo mn, m'n' le immagini solari formate dai due specchi simili ptq, PE'Q aventi lo stesso asse principale, si avrà arc. PE'Q : arc. ptq :: CE' : Ct :: $\frac{1}{2}$CE' : $\frac{1}{2}$Ct :: Ce' : Ce; ma a motivo dei triangoli simili Cn'm', Cnm si ha Ce' : Ce :: n'm' : nm; dunque arc PE'Q : arc. ptq :: n'm' : nm; quindi gli spazj occupati dalle immagini essendo proporzionali alle superficie degli specchi, ed in conseguenza alla quantità della luce riflessa, la densità della luce sarà uguale in amendue le immagini.

Da ciò per altro non si può conchiudere, che uguali siano pur anche gli effetti di due spec-

Fig.ª 37

chi ustorj simili. Imperocchè gli specchi maggiori avendo il foco ad una distanza più grande della superficie riflettente; ed essendo maggiore la quantità assoluta della luce, ognun vede, che un combustibile anche di notabile estensione posto nel foco di uno specchio grande verrà meglio investito dalla luce, la quale combinandosi in un gran numero di punti col corpo potrà produrre più facilmente, e più energicamente i soliti fenomeni di una violenta combustione.

Gli specchi parabolici sono fra gli ustorj quelli, che possono produrre il massimo concentramento, o densità di luce. Imperocchè se diriggasi al centro del Sole l'asse di questi specchj, tutti i raggi incidenti si uniscono in un sol punto distante dal vertice della quarta parte del parametro: ma la difficoltà somma di eseguire siffatti specchi li ha fatti omai dimenticare interamente.

Nè meno difficile è la costruzione degli specchi ustorj di lungo foco per gli ostacoli grandi che si presentano nella formazione di una sfe-

ra di gran raggio, che nel nostro caso deve esser doppio della lunghezza focale dello specchio. Per lo che i Fisici sono ricorsi ad altri mezzi per ottenere gli effetti degli specchj ustorj anche a notabili distanze.

Il celebre P. Kircher Gesuita il primo di tutti dopo il risorgimento delle scienze, immaginò di sostituire ad uno specchio concavo diversi specchietti piani in tal guisa disposti, ed inclinati fra loro, che i raggi solari riflessi dalle loro superficie convergessero in una data porzione di spazio. Egli ne immaginò che cinque collocandoli così che il concorso delle parziali immagini accadesse alla distanza di 100 piedi; egli trovò che il calore era insoffribile. Ora, soggiunge egli, se cinque specchi producono sì grande effetto, cosa non dovremo aspettarci da cento, o da mille specchj nella stessa maniera ordinati? Il calore eccitato nel punto di concorso delle parziali immagini sarà così violento, che abbruccerà tutto, tutto ridurrà in cenere.

Diottrica

Definizioni, e Sperienze fondamentali

128° Oggetto della Diottrica sono i fenomeni che presenta la luce allorchè passa sotto diversi angoli d'incidenza da un mezzo diafano più denso in uno meno denso, e reciprocamente. Le seguenti sperienze presenteranno alcuni de' suddetti fenomeni, e ci apriranno la strada alla ricerca, ed alla spiegazione d'infiniti altri meritevoli della più profonda meditazione.

129 Introdotto per un foro piccolissimo A fatto nell'imposta AE (fig.ª 38) di una camera oscurissima un raggio solare SAB, il quale cada normalmente sulla superficie piana BG di un mezzo diafano più denso che l'aria, e terminato da facie parallele BG, HC notabilmente lontane, esso continuerà il suo camino nella stessa direzione, emergerà dal mezzo nel punto C, e cadrà inalterato (fuorchè nella densità) nel punto D

Fig.ª 38

della tavola, o parete opposta DK conservando lo stesso colore biancogialognolo che è proprio della luce solare.

130 Ma ben diversamente procede la cosa se il raggio incidente FE cada obbliquamente in F sulla superficie del corpo diafano formando colla normale LM condotta pel punto d'incidenza F l'angolo d'incidenza LFE 70°. Imperocchè in tal caso succedono fenomeni affatto singolari. 1°. Il fascetto lucido EF si divide in sette raggi diversamente colorati Fr, Fa, ... Fp, il primo de' quali è rosso, il 2° aranciato, il 3° giallo, il 4° verde, il 5° celeste, il 6° indago, o turchino, ed il 7° violaceo, o paonazzo.

2°. Tutti questi raggi deviano dalla direzione primitiva FK, e si accostano alla normale, o cateto d'incidenza LM: quello che vi si accosta meno è il raggio rosso Fr, e più di tutti il paonazzo Fp. L'accennato deviamento appelasi refrazione. I raggi diversamente colorati Fr, Fa.... Fp, diconsi raggi refratti rispetto al raggio incidente

EF. La superficie BG chiamasi superficie rifrangente. Gli angoli rFM, aFM....pFM formati dai diversi raggi refratti colla normale FM condotta pel punto d'incidenza appellansi angoli di refrazione. Gli angoli HFr, HFa.... HFp formati nel punto d'incidenza F dal prolungamento del raggio incidente coi diversi raggi refratti, chiamansi angoli di deviazione.

3.° I suddetti raggi emergendo dal mezzo più denso BH nel meno denso CK non soffrono più alterazione alcuna nel colore, e cangiando di nuovo cammino prendono ciascuno le direzioni rr', aa',-----pp' parallele fra loro, ed alla direzione primitiva EF, e cadendo sul piano bianco DK, vi dipingono sette piccoli tratti colorati r', a',-----p'. 4.° Se la grossezza FM sia soltanto di una, o due linee come ne' cristalli ordinarj, cosicchè la superficie posteriore CH cadesse in ch, i raggi colorati parallelamente emergenti sono così vicini, e per conseguenza sì piccolo lo spazio rp, che l'occhio non può distinguere

gli spazj diversamente colorati. 5°. Il raggio incidente EF, tutti i raggi colorati Fr, Fa, ---- Fp, e la normale alla superficie refringente esistono sopra uno stesso piano, il quale sarà evidentemente normale alla superficie refringente nel punto d'incidenza F. D'onde si raccoglie cha l'angolo d'incidenza, e di refrazione esistono nel piano d'incidenza, vale a dire nel piano che passa pel raggio incidente, e per la perpendicolare LF.

131 Segue dalle precedenti osservazioni 1°. Che la luce solare è composta di sette raggi, o per meglio dire sette fluidi diversamente colorati, e mescolati insieme. 2°. Che il raggio rosso Fr è il meno refransibile, siccome quello che si scosta meno dalla direzione primitiva FH, e che il paonazzo lo è più di tutti. 3°. Che passando la luce da un mezzo meno denso in uno più denso, l'angolo d'incidenza è sempre maggiore di qualsiasi angolo di refrazione. 4°. Che i raggi refratti Fr, Fa-----Fp debbonsi considerare come raggi inci-

denti rispetto alla superficie posteriore MH parallela a BG, della quale emergendo, siccome abbiamo detto (130.) prendono le direzioni rr', aa', ---- pp' parallele alla direzione primitiva FK: condotte adunque pei punti di seconda incidenza r, a, ---- p, le normali mrn --- bpd, si avranno gli angoli di seconda refrazione nrr' --- dpp', e siccome rr' è parallelo ad mK, si avrà l'angolo di seconda refrazione nrr' = rmH; ma rmH = Frm + rFm; dunque nrr' = Frm + rFm, d'onde si vede che l'angolo di seconda refrazione è uguale alla somma dell'angolo di seconda incidenza, e di quello di prima deviazione; e che per conseguenza è maggiore dell'angolo d'incidenza Frm; quindi il raggio Fr passando da un mezzo più denso in uno meno denso si rifrangerà di nuovo scostandosi dalla normale rn. Medesima dimostrazione per tutti gli altri raggi Fa, Fg, ... Fp; ove però conviene osservare, che i raggi più refrangibili siccome si accostano di più alla normale FM, formeranno sulla seconda superficie

CH angoli d'incidenza sempre più piccoli, sicchè minimo di tutti sarà l'angolo Fpb formato dal raggio paonazzo incidente Fp colla normale bp: ma siccome anche questo raggio emerge nella direzione pp' parallela ad FK, l'angolo di seconda refrazione dpp' sarà = nrr'; e poichè l'angolo d'incidenza Fpb è < Frm, è chiaro che il raggio paonazzo emergendo dal mezzo più denso nel meno denso sulla direzione pp' si scosta più dalla direzione incidente che il raggio rosso rr' rispetto alla sua direzione incidente Fr.

132 Il seguente esperimento conferma pienamente la verità di quest'ultima conseguenza. Fatto cadere il raggio NV (fig.a 38) normalmente alla superficie refringente BG di un mezzo più denso che l'aria, esso arriverà sino alla superficie inclinata RT senza aver sofferta refrazione o decomposizione alcuna. Emergendo questo raggio dal mezzo più denso nel meno denso, si divide al solito nei sette raggi colorati

Pr, Pa, ... Pp, e condotta pel punto d'incidenza P la normale tPz si trova che tutti emergendo si rifrangono scostandosi dalla normale Pz, e che sotto il medesimo comune angolo d'incidenza VPt meno si rifrange, o si allontana dalla normale il raggio rosso Pr, e più di tutti il raggio paonazzo Pp.

Sperienze Newtoniane col Prisma.

133 Il prisma di cui si fa uso comunemente nelle sperienze diottriche è un pezzo di cristallo tersissimo, privo di bullule, e di onde, avente la forma di un prisma retto AF (fig.° 39) a basi triangolari ACD, BEF isoseli, o equilatere.

Fig. 39

L'asse del prisma è una retta GH stesa fra le due opposte basi, e parallela agli spigoli, o angoli piani AB, CE, DF del prisma. Quindi l'asse è parallelo alle tre superficie laterali, o faccie del prisma, ed è normale alle due basi opposte. Se dunque si taglierà il prisma per mezzo di

un piano normale all'asse GH, la sezione sarà triangolare, e perfettamente simile, ed uguale alle basi ACD, BEF.

Le due superficie, o faccie del prisma sulle quali cade un raggio di luce allorchè attraversa il mezzo, diconsi superficie, o faccie refringenti. L'angolo formato da queste due superficie appellasi angolo refringente: la superficie opposta all'angolo refringente chiamasi base del prisma.

134. Premesse queste nozioni, supponiamo che nell'imposta di una camera oscura sia fatto un foro circolare F, di due linee circa di diametro, pel quale passi un raggio di luce solare FI (fig.ª 40) incidente in I sulla faccia VS di un prisma VST, il cui asse sia orizzontale, e normale ad un piano steso pel centro del foro F, e del Sole. Questo raggio penetrando nel prisma si rifrange in sette specie di raggi colorati accostantisi tutti alla normale PSC condotta pel punto S della prima incidenza.

Fig.ª 40

Divisi per tal modo i raggi colorati, attraversano il mezzo cristallino, ed arrivano all'altra faccia ST, dalla quale emergendo, e passando in un mezzo meno denso, quale è l'aria, si rifrangono di nuovo scostandosi dalla normale, ed acquistando per conseguenza maggior divergenza fra loro. Quindi raccolti questi raggi sopra un piano bianco verticale DG parallelo all'asse del prisma, e normale al piano steso pel centro del foro, e del Sole, sopra di esso si dipingerà una figura allungata terminata nelle estremità A, B da due curve sensibilmente semicircolari, e poco distinte, e lateralmente da due linee parallele nette, e decise.

La parte superiore di questa figura, che suole appellarsi spettro prismatico è tinta di color paonazzo, e tutte le altre scendendo al basso sono occupate dai raggi turchini, celesti, verdi, gialli, arranciati, e rossi, che occupano il segmento inferiore dello spettro.

Se l'angolo rifrangente S del prisma invece di essere volto al basso, lo fosse in alto, si avreb-

be bensì lo spettro prismatico AB, ma esso cadrebbe in una posizione diversa del piano DG, ed i raggi avrebbero una posizione opposta alla precedente rispetto all'orizzonte, cosicchè i raggi paònazzi occuperebbero la parte inferiore dello spettro, ed i rossi la superiore.

135. Fatto nella tavola DG in cui dipingesi lo spettro colorato AB un piccol foro, per cui possa passare un raggio di un certo colore, per esempio il paonazzo restando esclusi tutti gli altri, se facciasi cadere questo raggio sul prisma tsv arbitrariamente collocato, e se si vuole anche formato di cristallo colorato, in rosso, in verde...., dopo le due rifrazioni rimane qual era nello spettro AB, e raccolto sopra una nuova tavola, ivi dipinge un piccol circolo Q di color paonazzo.

Quanto si è detto della luce solare, estendersi deve a qualsiasi corpo luminoso, la cui luce abbia un color bianco gialognolo simile a quello della luce solare. Ma la tenue quantità di luce che emana da questi corpi rispetto alla immensa copia della

solare, formerà uno spettro prismatico debolissimo, e terminato da contorni poco discernibili.

136. Se per mezzo di diversi prismi si mescolano insieme due, o tre colori diversi; p. e. il giallo, ed il celeste risulterà un color verde somigliantissimo a quello dello spettro prismatico, ma non però identico, poichè là dove il primo si decompone per mezzo di un prisma, il secondo per quanti prismi facciasi passare rimane sempre lo stesso.

137. Se un raggio solare AK cade sul prisma EFG in (fig.a 41) K cosicchè esca dalla faccia attigua GE, si dipingerà sulla tavola TS lo spettro prismatico pr terminato superiormente dai raggi paonazzi, ed inferiormente dai rossi. Ma se a poco a poco volgasi il prisma intorno al suo asse in guisa che l'angolo rifrangente E s'innalzi, incominceranno a scomparire successivamente i colori dello spettro pr incominciando dal paonazzo, indi il turchino, poi il celeste, poi il verde, il giallo l'arranciato, e finalmente il rosso. Tutti questi raggi vengono riflessi dalla superficie GE, e ca-

Fig. a 41

dendo sull'altra superficie GF emergono dopo due incidenze una in K, e l'altra in H, e dopo un riflessione in D, emergono, dico, colorati, e dipingono sulla tavola ts un nuovo spettro, il quale va formandosi a misura che lo spettro prismatico pr scomparisce, di maniera che sulla tavola ts compariscono i colori collo stesso ordine, secondo il quale scompariscono dallo spettro pr.

138. Dal che evidentemente raccogliesi 1°. Che i raggi più refrangibili, quali sono i paonazzi, sono altresì i più riflessibili, e reciprocamente. 2°. Che i colori dello spettro prismatico sono indecomponibili, e diconsi perciò colori primitivi, semplici, omogenei. La loro mancanza dà il nero: la loro mescolanza produce un nuovo colore, che a proporzione partecipa dei componenti, e l'unione di tutti i raggi prismatici insieme genera il bianco.

Gradazione di tinte ne' colori prismatici dello Spettro

139. Abbiamo detto che lo spettro prismatico è di-

viso in sette spazj, o tratti diversamente colorati: in rosso, in arranciato, ... in paonazzo. Non conviene credere però che il colore di cui è tinto ciascuno spazio abbia da per tutto la stessa tinta, e la stessa intensità. In questo, come in moltissimi altri fenomeni della natura, ha luogo la legge di continuità; vale a dire che per gradi impercettibili uno de' colori estremi p. e. il rosso, si accosta all'arranciato: questo nella stessa maniera al giallo, e così di seguito sino al paonazzo. Quindi è probabile che la luce del sole risulti da una infinità di raggi diversamente colorati per degradazioni insensibili; e che le sette specie da noi distinte nello spettro prismatico, altro non siano che collezioni parziali di que' raggi, i quali molto si assomigliano nel colorito, e che si rifrangono sensibilmente sotto un medesimo angolo.

Posizione del Cammino rifratto del raggio di Luce rispetto all'angolo rifrangente &c.

140. Se un raggio primitivo di luce passi dall'aria

Fig.a 42

nel prisma vitreo BAC (fig.a 42) con tal direzione, che formi verso l'angolo rifrangente A un angolo ottuso, o, ciò che è lo stesso, se il raggio incidente GF giaccia nello spazio compreso tra la normale d'incidenza QF, e la apertura del prisma, allora dopo la prima rifrazione verso la normale prende la direzione FE, e scostasi manifestamente dall'angolo rifrangente A. Che se l'angolo FE formi coll'altro lato AC del prisma un angolo acuto FEA, allora emergendo dal prisma si scosterà di nuovo dalla normale LP di seconda incidenza; quindi il raggio piegherà verso l'apertura BC del prisma. Dal che si vede che il cammino, o poligono rifratto GFEH percorso dal raggio primitivo presenta in tal caso la sua convessità all'angolo rifrangente del prisma; piegando da una parte, e dall'altra verso l'apertura del prisma.

Se dunque suppongasi che l'angolo rifrangente A sia volto al basso, e che il raggio incidente GF cada sul prisma dall'alto al basso, il

raggio emergente EH si dirigerà dal basso in alto, e reciprocamente.

141. Supposto adunque che il prisma BA'C sia a contatto di base coll'altro prisma BAC (fig.ª 42), e supposto che il piano della figura rappresenti la sezione in essi fatta da un piano normale ai loro assi, è chiaro che se dal punto luminoso G parta un raggio luminoso GF' verso la superficie BA' del nuovo prisma, esso esisterà nello spazio compreso fra la normale d'incidenza Q'F', e l'apertura, o base BC del prisma; quindi se F'E' formi un angolo acuto con A'E' emergerà piegando verso la base, ed incontrerà in H l'altro raggio emergente EH derivante anch'esso dallo stesso punto G. Dunque il punto H sarà un foco, o un immagine del punto G. Vedremo fra poco l'applicazione di questo principio alla teoria delle lenti.

142. Se il raggio luminoso cadesse sul prisma colla direzione normale QL, non soffrirebbe che una sola refrazione in m, ed emergendo prenderebbe

la direzione mq. ed il camminino rifratto Qmq presenterà ancora l'angolo saliente all'angolo rifrangente del prisma.

Finalmente se il raggio luminoso RF esista nello spazio compreso fra la normale d'incidenza, e l'angolo rifrangente, dopo la prima riflessione prenderà la direzione Fn accostandosi alla normale QL: quindi l'angolo RFn = < 180°. Emergendo dal prisma si scosterà dalla normale np prendendo la direzione nr; e l'angolo Fnr rivolto ad A è = Fnt + tnr = 180° + tnr; quindi l'angolo esteriore Fnr è > 180°, e per conseguenza è un angolo saliente. Dal che si vede che il cammino rifratto percorso dal raggio RF presenterà ad A prima il concavo; indi il convesso, ed avrà per conseguenza la forma della lettera Z.

143. Quando il raggio luminoso soffre nel prisma due rifrazioni, succedono neccessariamente due deviazioni, le quali rispetto al raggio GF considerato nel primo caso, di cui supponsi che la

parte rifratta FE formi un angolo acuto col lato AC del prisma, concorrono amendue ad allontanar sempre più il raggio emergente EH dalla direzione primitiva GMG. Prolungando adunque i due raggi GT, EH sino al punto di concorso M, l'angolo GMH, o meglio il suo supplemento GMN $= \partial$ esprimerà l'effetto delle due summentovate deviazioni EFM $= \partial'$; FEM $= \partial''$; e poichè l'angolo esterno GMN è $=$ EFM $+$ FEM, è chiaro che $\partial = \partial' + \partial''$, d'onde si vede che l'angolo di doppia deviazione è uguale alla somma delle due deviazioni parziali. Inoltre poichè MEF $=$ MEL $=$ HEP (r'') $-$ FEL (i''); MFE $=$ MFL $-$ EFL $=$ GFQ (i') $-$ EFL (r'), si avrà GMN $= \partial - i' - i'' + r'' - r'$; cioè l'angolo di doppia deviazione uguale alla somma delle differenze degli angoli d'incidenza, e di refrazione.

Ma se l'angolo FEA fosse ottuso, allora il cammino rifratto GFEH avrebbe la forma di una Z; l'angolo di doppia deviazione ∂ sarebbe $\partial = \partial' - \partial''$; e poiche in generale si ha $\partial' = i' - r'$;

$\delta'' = r'' - i''$, sostituendo si troverà $\delta = i' - r' - r'' + i''$.

144. Risulta dal fin qui detto, che quanto più grande sarà l'angolo di doppia deviazione GMN, ossia HMG' tanto più il punto, o immagine H formato sul piano G'H dal raggio emergente si allontanerà dalla direzione primitiva GG' del raggio incidente, e reciprocamente. Dunque se restando invariata la direzione incidente GG' suppongasi che il prisma BAC ruota attorno al suo asse S, e prenda posizione tale, che l'angolo di doppia deviazione diventi minimo, allora l'immagine H a poco a poco si trasporterà in un punto H' ove si troverà nella massima possibile vicinanza alla direzione primitiva GG'. Vedremo fra poco come si determini, e si conosca quella posizione del prisma; la quale corrisponda al minimo angolo di doppia deviazione.

145. Nel quadrilatero LFAE formato dalle due faccie rifrangenti AF, AE, e dalle rispettive normali FL, EL, essendo retti gli angoli in

F, ed in E, è chiaro che l'angolo FLE formato dalle due normali è supplemento dell'angolo rifrangente BAC = a; ma FLE è altresì supplemento dell'angolo mLE = LFE (r') + FEL (i"), dunque ang: mLE = ang BAC = LFE + FEL, ossia a = r' + i", ciò è l'angolo rifrangente del prisma è uguale alla somma della prima refrazione, e della seconda incidenza; o in altri termini; uguale alla rifrazione, ed alla incidenza che succedono entro il prisma. Ma se l'angolo FEA è un angolo ottuso, allora si avrà a = r' i".

Misura dell' Angolo rifrangente di un Prisma

146 Collocato il prisma retto BAC (fig.ª 43) di cui si vuole misurare l'angolo rifrangente A, sopra un piano HK, si addatti il recipiangolo EFML a quei lati del prisma che comprendono l'angolo proposto. In tal situazione l'angolo MAL formato dalle due regole dello stromento,

Fig.ª 43

o il suo verticale E.GF, esprime il cercato angolo di refrazione, e potrà essere misurato per mezzo di un settore circolare esattamente diviso in gradi, ed in alcune parti aliquote di grado.

Metodi per determinare la Rifrazione della Luce Solare

147. Se trattasi di sostanze fluide delle quali vogliasi conoscere la forza rifrangente, si farà uso del seguente istrumento immaginato da Newton a tal uopo. Prendasi un pezzo di legno, o piuttosto una lastra metallica la cui lunghezza ZK (fig.ª 44) sia di 2 metri circa (6 pi.di 2 pollici), ed abbia i lati opposti perfettamente piani, e paralleli. Siano HI, KL due piani quadrati, normalmente collocati sulla faccia superiore della lastra ZK: il primo distante quattro pollici circa dall'estremità della lastra, e l'altro KL assicurato all'estremità K. Prendasi un vaso CF aperto alle due estremità, e

Fig.ª 44.

formato di qualsiasi materia, e per mezzo di un buon mastice si attacchi al piano HI, nel quale evvi un forellino rottondo F. del diametro di 2. linee circa, e corrisponde a un punto R segnato sull'altro piano KL ad ugual distanza che F della superficie superiore della lastra, in maniera che la retta FR sia esattamente parallela agli spigoli della lastra HK.

Si addatti al foro F un pezzo di cristallo a superficie parallele, e con mastice vi si assicuri in modo, che il cristallo sia parallelo ai piani HI, KL, e non lascj filtrare il fluido contenuto nel vaso.

Preparato in tal modo lo stromento, e riempito il vaso CF d'acqua sino alla metà, si dirigga l'asta principale HK al centro del Sole, e le si dia una tale inclinazione che il raggio Solare OB cadendo obbliquamente sulla superficie orizzontale mn del fluido si rifranga, e si risolva ne' sette colori Br, --- BF, ---- Bp. Movendo un poco l'asta HK attorno all'asse GN sarà

facile di far passare uno de' raggi primitivi p. e. il verde pel forellino F, e di farlo cadere sul corrispondente punto R. Prendasi allora l'inclinazione dell'asta HK all'orizzonte per mezzo di un gran quadrante, il cui lato PQ sia applicato all'asta, e dal cui centro P scenda un filo appiombo PV.

Ciò posto, dico, che l'angolo QPZ misurato dall'arco QZ è uguale all'angolo di refrazione EBF formato dall'assunto raggio verde BF colla normale BE condotta pel punto d'incidenza B. Imperocchè essendo PQ parallela ad FR, e la superficie del fluido mBn parallela all'orizzonte, la normale BE sarà verticale, e per conseguenza parallela al filo appiombo PV; quindi l'angolo di refrazione EBF sarà uguale all'angolo QPZ.

Nell'istante dell'osservazione si dirigga il lato Q'B' di un altro quadrante Q'B'T' al centro Solare O'. In tal posizione il filo appiombo B'Z' determina l'arco Z'Q' misura

dell'angolo Z'B'Q' = O'B'C' angolo formato dalla verticale B'C' col raggio Solare. Ma poichè OB è parallelo ad O'B' siccome proveniente dallo stesso centro solare infinitamente lontano, e le rette BC, B'C' sono verticali, è chiaro, che l'angolo d'incidenza OBC è = O'B'C' = Q'B'Z' misurato dall'arco Z'P'.

148. Ripettendo queste osservazioni per ciascun raggio colorato, e per diversi angoli d'incidenza del raggio solare OB, Snellio, ed in seguito Newton dopo un profondo esame istituito per trovare la legge di dipendenza frà questi due angoli per ciascun raggio di luce, scoprirono un rapporto costante non già fra gli angoli d'incidenza, o di rifrazione, ma fra una funzione trigonometrica di essi, ciò è tra i loro seni, cosicchè fu stabilita la seguente legge fondamentale di tutta la Diottrica: I seni d'incidenza, e di rifrazione per un dato raggio primitivo che passi per due mezzi attigui di data densità, sono esattamente, o prossimamente alme-

no in ragione costante.

Nel caso da noi considerato in cui i raggi primitivi passano dall'aria nell'acqua, si è trovato, che pei raggi rossi il rapporto dei seni d'incidenza, e di refrazione è quello di 1 : 0,75; pei raggi verdi 1:0,74654, o prossimamente 4:3; pei raggi paonazzi 1:0,74312.

149. Rispetto alla refrazione della luce nei corpi diafani, e solidi, Newton ha dimostrato con sperienze moltiplici, ed ingegnosissime, che se tutti i raggi primitivi suppongansi incidenti gli uni sopra gli altri sulla superficie piana RS (fig.ª 45) separante il vetro rs dall'aria RQS, e secondo la direzione costante AC, o suppongasi che il raggio solare HC cada normalmente sulla superficie FG del vetro inclinata alla superficie inferiore RS: indi si concepisca diviso in 50 parti il seno AD della comune incidenza ACD, allora i seni rr', pp' di refrazione nell'aria de' raggi rossi meno refrangibili, conterranno 77, e 78 delle sud-

Fig.ª 45

dette parti rispettivamente; e poichè ciascun raggio solare primitivo occupa una certa porzione dello spettro, entro la quale cadono tutti i raggi sensibilmente rossi ( ), i seni di rifrazione di tutta la graduazione de' raggi rossi, hanno tutti i gradi intermediarj, e compresi fra il seno espresso da 77, e da $77\frac{1}{8}$; quelli de' raggi arranciati da $77\frac{1}{8}$ sino a $77\frac{1}{5}$; i seni de' raggi gialli sono compresi fra $77\frac{1}{5}$, e $77\frac{1}{3}$; de' raggi verdi fra $77\frac{1}{3}$ a $77\frac{1}{2}$; de' celesti fra $77\frac{1}{2}$ sino a $77\frac{2}{3}$; de' turchini fra $77\frac{2}{3}$ e $77\frac{7}{9}$; finalmente de' raggi violetti da $77\frac{7}{9}$ a 78.

Reciprocamente se il raggio solare passi dall'aria nel vetro, la sperienza ha dimostrato che il rapporto fra i seni d'incidenza, e di refrazione pei raggi rossi è compreso fra 77 : 50, e $77\frac{1}{8}$: 50; quello de' seni d'incidenza, e di refrazione de' raggi arranciati è compreso fra $77\frac{1}{8}$: 50 e $77\frac{1}{5}$: 50; quello dei gialli fra $77\frac{1}{5}$: 50, e $77\frac{1}{3}$: 50; e così di seguito. Infatti se suppongasi che il raggio rosso rc cada dall'aria sul vetro

sulla stessa direzione con cui ne uscì, è chiaro che egli penetrando nel vetro lo attraverserà su quella stessa direzione, ma in senso opposto, che ebbe quando dal vetro passò nell'aria: Quindi l'angolo rCr' diverrà angolo d'incidenza; e ACD angolo di refrazione: dunque sarà sen rCr' : sen ACD :: rr' : AD :: 77, o $77\frac{1}{8}$: 50; Medesimo ragionamento per tutti gli altri raggi.

150. I raggi verdi che sono collocati verso il mezzo dello spettro prismatico, e che sono attigui ai celesti, hanno, come la stessa loro situazione lo indica, rispetto ai seni una refrangibilità tale, che il rapporto del seno d'incidenza, e di refrazione è medio aritmetico proporzionale frà i rapporti dei seni d'incidenza, e di refrazione dei raggi estremi, ciò è de' rossi, e de' paonazzi. L'indicato rapporto è altresì denominato rapporto di refrazione, o di refrangibilità di un dato raggio che passi da un mezzo in un altro: laonde a questi soli si dovrebbe attribuire la denominazione di raggi di refrangibilità media; o raggi medj. Con tutto ciò

alcuni autori (vedi Fischer pag: 425) avendo più riguardo alla vivezza del colore che al rapporto dei seni, ed alla situazione dei colori primitivi nello spettro, considerano come veri raggi medj i raggi gialli confinanti, o attigui ai verdi. Noi per altro considereremo raggi medj quelli, che hanno rifrangibilità media rispetto alla ragione dei seni d'incidenza, e di refrazione. Giova qui l'osservare che nei calcoli, e nelle ricerche in cui non si tien conto, ne' si considera la decomposizione della luce, si assume sempre il rapporto de' seni d'incidenza, e di refrazione media, quella cio'è de' raggi verdi prossimi al celeste. Così se il raggio passi dall'aria A nel vetro comune V, la ragione del seno d'incidenza A sen i a quello di refrazione V. sen r pei raggi medj è di 31:20, ovvero di 3:2 prossimamente; se passi dall'aria A nel Flint glass (celebre cristallo inglese) la ragione dei seni A sen i, F sen r è incirca di 8:5; e se passi dall'aria A nell'acqua H, la ragione dei seni A sen i, H sen r è incirca di 4:3. Recipro-

camente il rapporto fra i seni d'incidenza e di refrazione è di 20 : 31, o di 5 : 8; o di 3 : 4; se passi dal vetro comune nell'aria, o dal Flint, o dall'acqua nell'aria, questa reciprocazione si intenda avvertita una volta per sempre.

151. Fra i differenti metodi immaginati per determinare la rifrazione della luce ne' corpi diafani, o solidi terminati da due superficie piane fra loro inclinate, il più ingegnoso è quello che ha proposto Newton nelle sue lezioni di Ottica. Eccolo in succinto.

Fig.a 42

Se facciasi cadere un raggio primitivo GF (fig.a 42) sopra un prisma BAC, il cui angolo rifrangente sia rivolto al basso, dopo le due rifrazioni il raggio emergente scostandosi dalla direzione primitiva GG' dipingerà in alto l'immagine H del punto luminoso G. Se ora facciasi ruotare il prisma BAC attorno all'asse S cosicchè l'angolo rifrangente scorra per tutti i punti dell'arco circolare A''AA''' si vedrà l'immagine H scendere a poco a poco sino in H'. ove

rimane stazionaria, indi sollevasi di nuovo verso la posizione primitiva H. Per lo che il punto H' sarà il limite del massimo avvicinamento dell' immagine alla direzione primitiva, e per conseguenza (   ) nella posizione del prisma corrispondente all'immagine stazionaria in H l'angolo di doppia deviazione FMN, ossia HMG sarà minimo. E poichè il minor, o maggior valore dell'angolo di doppia deviazione dipende simultaneamente e dall'angolo d'incidenza GFQ, e dalla maggiore, o minor densità del mezzo, e dell'angolo rifrangente BAC del prisma, ognun vede che il minimo valore dell'angolo di doppia deviazione dipende neccessariamente da una particolare combinazione, o rapporto de' tre accennati elementi. Per discuoprire questo particolare rapporto suppongo che $n:m$ rappresenti il rapporto fra i seni di prima incidenza GFQ = LFM = i', e di prima refrazione EFL = r'; di sorta che sia $\text{sen}\ i' : \text{sen}\ r' :: n : m$, d'onde $\text{sen}\ i' = \text{sen}\ r' \times \frac{n}{m}$ (A). L'angolo di seconda incidenza FEL = i''; quello

di seconda refrazione r'': l'angolo rifrangente BAC $=a=r'+i''$ (b). Inoltre abbiamo trovato (143) che l'angolo di doppia deviazione HMG' $=\delta=i'-i''+r''-r'=i'+r''-(r'+i'')$; ma $r'+i''=a$; dunque $\delta=i'+r''-a$ (c) che deve essere un minimo.

Finalmente conviene osservare che il raggio FE: passando dal mezzo nell'aria, dà la proporzione sen i'': sen r'' :: $m:n$, quindi sen $r''=$ sen $i''\times\frac{n}{m}$ (d).

Ciò posto per la teoria de' massimi, e de' minimi l'equazione (c) dà $d.\delta=di'+dr''=0$; quindi $dr''=-di'$. L'equazione (b) ove $\underline{a}$ è costante dà $dr'=di''=0$, e però $di''=-dr'$. Differenziando le equazioni (a) (d) si ha $di'\cos i'=\frac{n}{m}dr'.\cos r'$; $dr''\cos r''=\frac{n}{m}di''\cos i''$. Sostituendo in quest'ultima i valori di dr'', di'' si avrà $di'\cos r''=\frac{n}{m}dr'\cos i''$. Dividendo la prima per questa si avrà $\frac{\cos i'}{\cos r''}=\frac{\cos r'}{\cos i''}$: innalzando al quadrato, e sostituendo $1-\text{sen}^2.$ in vece di $\cos^2.$ si avrà $\frac{1-\text{sen}^2 i'}{1-\text{sen}^2 r''}=\frac{1-\text{sen}^2 r'}{1-\text{sen}^2 i''}$. Facendo scomparire le frazioni, e riducendo si avrà $\text{sen}^2 r''(\text{sen}^2 r'-1)-\text{sen}^2 r'=\text{sen}^2 i'(\text{sen}^2 i''-1)-\text{sen}^2 i''$. Sostituendo i valori di $\text{sen}^2 r''$, $\text{sen}^2 i'$ cavati dalle

equazioni (a)(d) si avrà $\frac{n^2}{m^2}$ $sen^2 i''(sen^2 r'-1)-sen^2 r'$ $=\frac{n^2}{m^2}$ $sen^2 r'(sen^2 i''-1)-sen^2 i''$, ossia $n^2 sen^2 i''(sen^2 r'-1)$ $-m^2 sen^2 r'=n^2 sen^2 r'(sen^2 i''-1)-m^2 sen^2 i''$. Moltiplicando si ha $n^2 sen^2 r' sen^2 i''-n^2 sen^2 i''-m^2 sen^2 r'=n^2 sen^2 r' sen^2 i''-n^2 sen^2 r'-m^2 sen^2 i''$. Riducendo, e trasponendo risulta. $sen^2 r'(n^2-m^2)=$ $sen^2 i''(n^2-m)$; quindi $sen^2 r'=sen^2 i''$; ed $r'=i''$.

Inoltre l'equazione precedente $\frac{\cos i'}{\cos r''}=\frac{\cos r'}{\cos i''}$ diventa $\frac{\cos i'}{\cos r''}=\frac{\cos i''}{\cos r'}=1$; quindi $\cos i'=\cos r''$; laonde $i'=r''$.

152. Esaminando questi due risultati si vedrà che nel caso dell'immagine stazionaria caso corrispondente al valor minimo dell'angolo di doppia deviazione, l'angolo della prima incidenza i' ossia GFQ è uguale all'angolo r'' ossia HEP della seconda refrazione, e l'angolo della prima rifrazione r', ossia EFL è uguale all'angolo i'' ossia FEL della seconda incidenza; segue da ciò 1°. Che il raggio incidente GF, e l'emergente EH sono ugualmente inclinati alle rispettive faccie rifrangenti AB, AC del prisma. 2°. Che essendo retti gli angoli LFA, LEA, ed essendo uguali gli angoli EFL, FEL, anche gli angoli EFA, FEA

saranno uguali; e per conseguenza il triangolo FAE sarà isoscele; il che indica che anche dentro il prisma il raggio rifratto FE ha la stessa inclinazione sulle due superficie, o lati rifrangenti. 3° Che essendo in generale (145) l'angolo BAC $= a = r' + i''$, in questo caso in cui si ha $r' = i''$ sarà $a = 2r'$, quindi $r' = \frac{a}{2}$, cioè l'angolo di refrazione entro il prisma è uguale alla metà dell'angolo rifrangente. Infatti se dal vertice A del triangolo isoscele FAE si conduca alla base FE la normale Ac, essa dividerà per metà la base, e passerà pel punto di concorso L delle due normali d'incidenza, e dividerà per metà l'angolo rifrangente BAC del prisma. Per tal modo risultano i due triangoli rettangoli simili LcF, LFA, ne' quali si ha ang: LFE=FAL $= \frac{1}{2}$ FAE; ossia $r' = \frac{a}{2}$ come si era già trovato.

153. Determinato in tal maniera il valore costante dell'angolo di prima rifrazione r' nell'ipotesi dell'immagine stazionaria, rimane a determinarsi l'angolo di prima incidenza i', onde cogniti amendue possa ricavarsi il rapporto dei loro seni. A tal fine si dia al prisma ABC (fig.ª 46) la

posizione conveniente all'immagine stazionaria P;
indi condotta una retta orizzontale MN si misurino
con un esatto quadrante le altezze angolari SMN,
PNM dei raggi incidente SD, ed emergente EP.
L'angolo di doppia deviazione EIM siccome esterno
sarà = INM + IMN; ma EIM è altresì = IDE
+ IED = 2 IDE; dunque 2 IDE = INM + IMN;
ed IDE = $\frac{INM + IMN}{2}$. Ora poichè l'angolo di
refrazione QDK = $\frac{ABC}{2}$, e l'angolo di prima incidenza
SDL = KDI = QDK + IDE; sostituendo
i valori trovati si vedrà che l'angolo d'incidenza
SDL = $\frac{1}{2}$ (ABC + IMN + INM).

Se il raggio emergente EP è parallelo all'orizzonte
MN, si avrà ang: INM = 0; quindi SDL =
$\frac{1}{2}$ (ABC + IMN): e se il raggio PE tende al basso,
allora l'angolo INM divien negativo, e si ha
SDL = $\frac{1}{2}$ (ABC + IMN − INM).

Con questo metodo si possono determinare i rapporti
dei seni d'incidenza, e di rifrazione per
qualsiasi raggio primitivo qualunque sia la sostanza,
o la materia di cui è formato il prisma.

Daremo in seguito una tavola dei rapporti de' seni d'incidenza, e di rifrazione per alcuni raggi primitivi. Per ora conviên sviluppare alcune cose relative allo spettro prismatico, e alla visione de' colori nel prisma.

Ricerche sulla Figura dello Spettro Prismatico

151 Abbiamo altrove accennato ( ) che lo spettro prismatico è di forma allungata, chiusa lateralmente da due lati rettilinei paralleli, ed alle estremità da due curve sensibilmente semicircolari. Newton facendo uso di un prisma di vetro VST il (fig. 40) cui angolo rifrangente S era di 64°. e facendo passare per esso i raggi solari che entravano nella camera per un foro circolare F di 3 linee di diametro, a cui il prisma è quasi attiguo, raccolse lo spettro prismatico AB sopra un piano verticale DG distante 18 piedi 6. poll. dall'asse orizzontale del prisma, e trovò che la lunghezza verticale AB dello spettro era di circa 10 $\frac{1}{4}$; poll. quel-

Fig.a 40

la dei lati rettilinei pr, di $8^{poll.}$ e la lunghezza orizzontale rn di $2^{poll.}\ 1^{lin.}\frac{1}{2}$. Osservò inoltre che facendo uso di prismi ad angoli rifrangenti maggiori, o minori, ritenuta sempre la distanza di $18^{piedi}\ 6$. scemava la lunghezza verticale AB dello spettro, ma la lunghezza orizzontale rn restava sempre la stessa; vale a dire di $2^{poll.}\ 1^{lin.}\frac{1}{2}$; e s'accorse che questa larghezza; il diametro del foro, corrispondeva esattamente alla corda di un angolo di 32' per un raggio uguale alla distanza di $18^{piedi}\ 6^{poll.}$

155 _ La seguente Tavola presenta alcuni dei principali risultati ottenuti da esattissime esperienze.

Tavola delle ragioni dei seni d'incidenza, e di refrazione dei raggi rossi, verdi ossia medj, e paonazzi.

Dall'Aria nel Vetro	
R. rossi	77 : 50 :: 1,54 : 1 :: 1 : 0,64935
M. medj sen i : sen r ::	77,5 : 50 :: 1,55 : 1 :: 1 : 0,64516 :: 31 : 20 :: 3 : 2 (e prossimamente)
P paonazzi	78 : 50 :: 1,56 : 1 :: 1 : 0,64103

Dall'Aria nell'Acqua

R 108 : 81 :: 1,33333 : 1 :: 1 : 0,75000

M sen i : sen r :: 108,5 : 81 :: 1,33951 : 1 :: 1 : 0,74654, e prof :: 4 : 3

P 109 : 81 :: 1,34568 : 1 :: 1 : 0,74312

Dall'Aria nel Flint.

R 313 : 200 :: 1,565 : 1 :: 1 : 0,63898

M sen i : sen r :: 316 : 200 :: 1,580 : 1 :: 1 : 0,63291, e prof :: 8 : 5

P 319 : 200 :: 1,595 : 1 :: 1 : 0,62696

Dal Vetro nel Flint.

R 313 : 308 :: 1,01623 : 1 :: 1 : 0,98403

M sen i : sen r :: 316 : 310 :: 1,01935 : 1 :: 1 : 0,98101, e prof :: 32 : 31

P 319 : 312 1,02244 : 1 :: 1 : 0,97806

Dall'acqua nel Vetro

R 926 : 800 :: 1,1575 : 1 :: 1 : 0,86393

M sen i : sen r :: 928 : 800 :: 1,1600 : 1 :: 1 : 0,86207, e prof :: 93 : 80

P 930 : 800 :: 1,1625 : 1 :: 1 : 0,86022

136. Osserv: Siccome i seni d'incidenza, e di refrazione conservano fra loro per due dati mezzi un rapporto costante, cosicchè qualunque sia l'incidenza i si ha (   ) sempre sen i : sen r :: m' : n'; e per altri due mezzi sen I : sen R :: p : q, giova talvolta per maggior semplicità, e speditezza di risultati ridurre il rapporto p : q in un altro m' : q' il cui primo termine m' sia uguale al primo dell'altro rapporto m' : n', onde si abbia sen I : sen R :: m' : q'. Così per raggi verdi avendosi dall'aria nel vetro sen i : sen r :: 31 : 20, e dall'aria nel Flint sen I : sen R :: 8 : 5 si fa $8 : 5 :: 31 : \frac{155}{8} = 19,375$; quindi sen I : sen R :: 31 : 19,375.

157. Teor. Supposto che un mezzo comune, ed uniforme p. e. l'aria circondi molti altri mezzi attigui, e terminati da superficie piane, e parallele, e che un raggio di luce dall'aria passi successivamente in tutti gli altri mezzi, emergerà di nuovo nell'aria con direzione parallela alla incidente.

Dimos. Rappresentino HM, LO, NQ (fig.ª 47) tre mezzi eterogenei rispetto alla forza rifrattiva,

Fig. 47

circondati sotto e sopra da uno strato d'aria ugualmente densa, e suppongasi che la ragione dei seni d'incidenza, e di refrazione dall'aria nello strato HM sia espressa da $m':n'$; dallo strato HM nello strato LO da $m'':n''$; dallo strato LO allo strato NQ da $m''':n'''$; e finalmente dallo strato NQ nell'aria da $m:p$.

Ciò posto il raggio incidente AA' rifrangendosi prenderà la direzione A'A''; e condotta la normale d'incidenza B'A', e presa sopra di essa una porzione arbitraria A'B' rappresentante il raggio tabulare I, si abbassino le due normali B'C', B'D' sul raggio incidente, e rifratto: queste due linee rappresenteranno i segni dei due angoli d'incidenza, e di refrazione B'A'C' = AA'G; B'A'D': Il raggio A'A'' penetrando nel mezzo LO si rifrangerà secondo A''A''': e condotta pel punto d'incidenza A'' la normale B''G'', e presa su di essa la porzione A''B'' = A'B' = rag. tab. si abbassino le rette B''C'', B''D'' normali al raggio incidente, e rifratto: queste due rette esprimeranno i seni d'incidenza A'A''G'' = B''A''C'', e di refrazione B''A''D''.

Fatta la stessa costruzione per tutte le superficie rifrangenti, ed osservando che il triangolo B'D'A' = B''C''A'', perchè A'B' è parallela, ed uguale ad A''B'', amendue sono rettangoli uno in D', l'altro in C'', ed hanno le basi sulla stessa retta A'C''; d'onde risulta B'D' = B''C'' = n', e che per la stessa ragione B''D'' = B'''C''' = n''; B'''D''' = B^{IV}C^{IV} = n'''.

Ciò posto se si esprima per m' : n' il rapporto dei seni d'incidenza, e di rifrazione dall'aria nel mezzo HM, e per m' : p' quello che avrebbe luogo se il raggio di luce dall'aria passasse immediatamente nel mezzo NQ, cosicchè considerato il raggio A^{V}A^{IV} come incidente dall'aria nel mezzo NQ, ed A^{IV}A''' il raggio rifratto, si abbia l'analogia il seno d'incidenza A^{V}A^{IV}B^{IV}: seno di refrazione G^{IV}A^{IV}A''' = B^{4}A^{4}C^{4}, ossia B^{IV}D^{IV}: B^{IV}C^{IV} :: m' : p', risulteranno evidentemente le seguenti proporzioni

B'C' : B'D' :: m' : n' ; B''C'', o B'D' :: B''D'' :: n' : n'' ;
B'''C''', o B''D'' : B'''D''' :: n'' : n'''; B^{IV}C^{IV}, o B'''D''' : B^{IV}D^{IV} :: p' : m',

moltiplicando queste proporzioni frà loro, e riducendo si avrà B'C' : B^{IV}D^{IV} :: p' : n'''. Ora p' esprime il seno

dell'angolo $B^{IV}A^{IV}C^{IV}$ = ang. $G^{IV}A^{IV}A'''$; ed n''' esprime il seno dell'angolo $B'''A'''A^{IV} = G^{IV}A^{IV}A'''$; dunque $p'=n'''$ e per conseguenza anche $B'C' = B^{IV}D^{IV}$.

Considerando ora che $G^{IV}B^{IV}$ è parallela a $G'B'$; che rettangoli sono i triangoli $A'B'C'$, $A^{IV}B^{IV}D^{IV}$; e che $B'C' = B^{IV}D^{IV}$, e che i raggi rifratti in ciascun mezzo esistono tutti dalla sessa parte delle normali $G'B'$, $G''B''$ - - - - - $G^{IV}B^{IV}$, si vedrà ad evidenza che il triangolo $A'C'B'$ è $= A^{IV}D^{IV}B^{IV}$, e che l'angolo $B'A'C'$, ossia $AA'G'$ è = ang: $B^{IV}A^{IV}A^{V}$; e che per conseguenza il raggio emergente $A^{IV}A^{V}$ è parallelo al raggio incidente AA'.

158. Se un raggio di luce AA' passi dall'aria in due mezzi attigui, e terminati da faccie parallele HM, LO, emergendo di nuovo nell'aria, e se si esprima per $m':n'$ il rapporto dei seni d'incidenza, e di rifrazione dall'aria nel mezzo HM, e per $p:q$ quello dall'aria nell'altro mezzo LO; dico che il rapporto $x:y$ dei seni d'incidenza, e di rifrazione dal mezzo HM all'altro LO è uguale al prodotto del rapporto de' seni d'incidenza, e di refrazione dall'aria in

in un mezzo, e del rapporto de' seni d'incidenza e di rifrazione dall'aria nell'altro mezzo, vale a dire $\frac{x}{y}=\frac{n'}{m'}\times\frac{p}{q}$. Imperocchè ritenuta la costruzione del teorema precedente risultano le seguenti analogie. B'C' : B'D' :: m' : n'; B"C", o B'D' : B"D" :: x : y; B"'C"', o B"D" : B"'D"' :: q : p moltiplicando queste proporzioni, e fatte le riduzioni si avrà B'C' : B"'D"' :: m'xq : n'yp; ma poichè il raggio emergente A"'A^{IV} è parallelo all'incidente AA' (157), chiaro è, che gli angoli B'A'C', B"'A"'C"' sono uguali; e per conseguenza puranche i loro seni B'C', B"'D"'; quindi nella precedente proporzione si avrà $m'xq = n'yp$, d'onde risulta $\frac{x}{y}=\frac{n'}{m'}\times\frac{p}{q}$.

Così se il primo strato HM sia di vetro comune, e l'altro LO di flint, poichè dall'aria nel vetro si ha $m' : n' = 31 : 20$, e dall'aria nel flint $p : q = 8 : 5$, il raggio A'A" passando dal vetro nel flint prenderà in esso una nuova direzione A"A"', e si avrà l'angolo d'incidenza A'A"G", ossia B"A"C", e di rifrazione B"A"D", i cui seni sono B"C" $= x$, B"D" $= y$: quindi $\frac{B''C''}{B''D''}=\frac{x}{y}=\frac{20.8}{31.5}=\frac{160}{155}=\frac{32}{31}$; quindi il raggio di luce passando dal vetro nel flint si ri-

frangerà in modo, che il seno x d'incidenza stia al seno y di rifrazione :: 32 : 31.

Similmente si troverà che se il raggio di luce passi dall'acqua nel vetro, il rapporto de' seni d'incidenza, e di rifrazione è di 93 : 80.

Se nella formola $\frac{x}{y} = \frac{n'p}{m'q}$ facciasi come altrove (136) abbiamo avvertito $p : q :: m' : r'$, si avrà $\frac{p}{q} = \frac{m'}{r'}$; quindi sostituendo $\frac{x}{y} = \frac{n'}{r'}$, d'onde si vede, che quando sono uguali i seni d'incidenza dall'aria nei rispettivi due mezzi, il rapporto dei seni d'incidenza, e di rifrazione da uno di essi nell'altro è uguale al rapporto de' soli seni di rifrazione dall'aria ne' due mezzi.

159 Espressi per i', i'' due angoli d'incidenza, e per r', r'' i corrispondenti di rifrazione, supposti due mezzi qualunque, e la ragione costante dei seni $n : 1$, si avrà $\text{sen}\, i' : \text{sen}\, r' :: n : 1$; $\text{sen}\, i'' : \text{sen}\, r'' :: n : 1$; quindi $\text{sen}\, i' : \text{sen}\, r' :: \text{sen}\, i'' : \text{sen}\, r''$: dunque supposte le incidenze sempre $< 90°$, se abbiasi $i' > i''$, sara anche $r' > r''$, cioè crescendo, o scemando l'incidenza, cresce o scema anche la refrazione.

160. Se i, ed $i+di$ sono due incidenze pocchissimo differenti, ed r, $r+dr$ le corrispondenti rifrazioni (159), avremo per la nota legge di rifrazione $\text{sen}(i+di) :: \text{sen}(r+dr) :: n:1$; $\text{sen}\, i : \text{sen}\, r :: n:1$; quindi $\text{sen}(i+di) : \text{sen}(r+dr) :: \text{sen}\, i : \text{sen}\, r$, cioè $\text{sen}\, i \cos di + \text{sen}\, di \cos i : \text{sen}\, r \cos dr + \text{sen}\, dr \cos r :: \text{sen}\, i : \text{sen}\, r$, ed essendo gli angoli di, dr evanescenti, sarà $\cos di = 1$; $\cos dr = 1$, e $\text{sen}\, di = di$; $\text{sen}\, dr = dr$; quindi la proporzione precedente diverrà $\text{sen}\, i + di \cos i : \text{sen}\, r + dr \cos r :: \text{sen}\, i : \text{sen}\, r$, ossia $\text{sen}\, i + di \cos i : \text{sen}\, i :: \text{sen}\, r + dr \cos r : \text{sen}\, r$, e sottraendo $\text{sen}\, i + di \cos i - \text{sen}\, i : \text{sen}\, i :: \text{sen}\, r + dr \cos r - \text{sen}\, r : \text{sen}\, r$, ossia $di \cos i : \text{sen}\, i :: di \cos r : \text{sen}\, r$; dividendo i termini del primo rapporto per $\cos i$, e quelli del secondo per $\cos r$, si avrà $di : dr :: \frac{\text{sen}\, i}{\cos i} : \frac{\text{sen}\, r}{\cos r} :: \text{tang}\, i : \text{tang}\, r$; onde se $\text{tang}\, i > \text{tang}\, r$, cioè se $i > r$, sarà anche $di > dr$.

Ora poichè la deviazione semplice δ, ossia dopo una sola rifrazione espressa da $\delta = i - r$ (130) differenziando si avrà $d\delta = di - dr$; dunque poichè nella nostra ipotesi $di > dr$, sarà $d\delta$ una quantità positiva: d'onde si vede, che cangiando i in $i+di$, ed r in $r+dr$, la deviazione δ essendo una funzione di i, r, si cangerà.

in $\delta + d\delta$, ed essendo $d\delta$ una quantità positiva, si vedrà che crescendo, o scemando l'incidenza, cresce, o scema anche la deviazione semplice.

161. Se il raggio incidente QF sia normale alla superficie BA del prisma vitreo (fig.° 42) passerà irrefratto sino alla superficie AC; ed emergendo nell'aria prenderà la direzione mq scostandosi dalla normale bd: l'angolo pmq esprimerà la deviazione δ' del raggio irrefratto, e si avrà manifestamente $pmq(\delta') = dmq - dmp = dmq(r'') - Fmb(i'')$; ma Fmb è complemento dell'angolo FmA, di cui è pur complemento l'angolo rifrangente $FAm = a$; e però $Fmb = FAm = a = i''$. Dunque $\delta' = r'' - a$. Ora se suppongasi che l'angolo rifrangente BAC sia piccolissimo, l'angolo d'incidenza $Fmb = a$ sarà pur piccolissimo, ed a proporzione piccolo l'angolo di rifrazione dmq; onde la ragione dei due angoli non differirà sensibilmente da quella dei loro seni: per lo che se il raggio passi dal prisma vitreo nell'aria; si avrà $Fmb(a) : dmq(r'') :: 2 : 3$; quindi $r'' = \frac{3a}{2}$: sostituendo questo valore nella for-

-mola precedente si avrà $\delta' = \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2}$. D'onde raccogliesi che se un raggio di luce dall'aria cada normalmente sopra un prisma di vetro ad angolo rifrangente piccolissimo, l'angolo di deviazione è prossimamente uguale alla metà dell'angolo rifrangente. Questa legge può estendersi senza error sensibile eziandio a que' casi, in cui l'incidenza sebbene non normale al prisma, di poco se ne scosti. Il precedente risultato esigge evidentemente tre condizioni 1°. Che i due mezzi siano aria, e vetro comune: 2°. Che il raggio incidente sia sensibilmente almeno normale alla superficie del prisma: 3°. Che l'angolo rifrangente sia piccolissimo.

Cangiamento della Refrazione in Riflessione.

162. Supposto che il raggio incidente sia rasente la superficie rifrangente del mezzo; o in altri termini, se l'angolo d'incidenza i sia di 90°. e perciò sen$i = 1$, allora gli angoli di refrazione nei diversi mezzi avranno i seguenti valori (155).

Dall'aria nel Vetro	Rossi	0, 64935 = sen. 40°, 29', 33"
seni = 1	Medj sen r =	0, 64519 = sen. 40°. 10'; 40"
i = 90°.	Paonazzi	0, 64103 = sen. 39°. 52'. 6"
Dall'aria nel Flint	R.	0, 63898 = sen 39°, 42', 57"
seni = 1	M. sen r =	0, 63291 = sen 39, 15, 55
i = 90°.	P.	0, 62696 = sen 38, 49, 34
Dall'aria nell'Acqua	R.	0, 75000 = sen 48, 35, 25
seni = 1	M. sen r =	0, 74634 = sen 48, 17. 30
i = 90°.	P.	0, 74312 = sen 47. 59. 52
Dal vetro nel Flint	R.	0, 98402 = sen. 79, 44, 36
seni = 1	M. sen r =	0, 98101 = sen 78, 48, 58
i = 90°.	P.	0, 97806 = sen 77, 58, 33
Dall'Acqua nel Vetro	R.	0, 86374 = sen 59°, 45, 39
seni = 1	M. sen r =	0, 86183 = sen 59, 32, 59
i = 90°.	P.	0, 85997 = sen 59, 20, 29

163. Reciprocamente se un raggio primitivo p. e. il rosso AC (fig.ª 45) passi dal vetro VS nell'aria RQS, e sia l'angolo d'incidenza ACD = 40°, 29', 33", l'angolo di rifrazione r = QCS sarà = 90°. quindi il raggio emergerà radendo, e coincidendo colla superficie di contatto dei due mezzi espressa da CS.

Fig.ª 45

Ma se l'angolo di incidenza A'CD = i' sia > 40°, 29', 33", il raggio non potrà più emergere dal vetro: imperocchè siccome al crescer della incidenza cresce anche la refrazione (159), si avrebbe sen i : sen i' :: sen r : sen r'; ma sen r = 1; quindi essendo sen i' > sen i, si dovrebbe avere sen r' > sen r > 1, il che è assurdo. In questo caso adunque il raggio non solo non potrà emergere nell'aria, ma neppure potrà percorrere il vetro nella direzione CS, giacchè in tal caso l'angolo di refrazione sarebbe di 90°. Esso dunque quando sarà arrivato alla superficie rifrangente nel punto d'incidenza C dovrà prendere una direzione CS' entro il vetro stesso, e per conseguenza il fenomeno della refrazione dovrà cangiarsi in tal caso in quello della ri-

flessione. Questi risultati sono pienamente confermati dalla sperienza, la quale inoltre ha fatto conoscere che tale riflessione segue la nota legge delle altre riflessioni. Non mi fermerò a parlare delle ipotesi singolari, ed ingegnose forse più che vere proposte da valenti fisici per ispiegare il sopradetto meraviglioso fenomeno. Chi bramasse averne contezza può tra gli altri consultare Newton (   ) Schewffer (   ) e Gravesande (   ).

Applicando i precedenti ragionamenti agli altri raggi primitivi si vedrà che il raggio verde non potrà passare dal vetro nell'aria se l'angolo d'incidenza è > 40°. 10', 40"; nè vi potrà passare il paonazzo che è il raggio più refrangibile, se l'angolo d'incidenza è > 39°; 52', 6". Dal che si vede che pei raggi più refrangibili la refrazione si cangerà in riflessione sotto un angolo d'incidenza minore che pei raggi verdi, e pei rossi che sono meno refrangibili: d'onde si raccoglie 1°. che i raggi più refrangibili sono an-

che più riflessibili: risultato conforme a quello, che altrove è già stato indicato (138). 2°. Che se sotto un dato angolo d'incidenza non passano i raggi rossi, molto meno passeranno tutte le altre specie di raggi.

Dell' Angolo dispersivo, e della forza dispersiva de' mezzi.

164. Chiamasi dispersione la differenza fra gli angoli di refrazione dei due raggi estremi rosso, e paonazzo per uno stesso angolo d'incidenza. Così dall'aria nel vetro, supposto l'angolo d'incidenza di 90°, la refrazione del raggio rosso è di 40°, 29', 33" = r, e del raggio paonazzo è di 39°, 52', 6" = p; quindi l'angolo di dispersione d = r − p =

(40°. 29', 33") − (39°, 52', 6") = 27'. 37".

Se l'angolo d'incidenza fosse minore di 90°, per esempio di 60°, allora si avrebbe l'angolo r = 18°. 56' 45" e p = 18°, 41' 42"; e la dispersione d = r − p = 15'. 3". In generale scemando l'angolo d'incidenza scema pur anche l'angolo di dispersione, ed essa diventa

nulla allorchè l'angolo d'incidenza è zero, vale a dire quando il raggio è normale alla superficie rifrangente, il che per se stesso è evidente, giacchè in tal caso il raggio passa indecomposto nel mezzo attiguo.

165. Per la qual cosa massimi saranno gli angoli di disperzione ricavati nella Tavola del §.° (162); poichè gli angoli di rifrazione ivi esposti sono stati calcolati pel massimo valore dell'angolo d'incidenza, che è quello di 90.°

Dunque passando la luce dall'aria nel Flint la massima disperzione sarà $d' = r - p = 39°; 42' 57'' - (38°; 49'; 34'') = 53'; 23''$. Dal che può dedursi che la differenza fra gli angoli r, p, ossia l'angolo di disperzione è ordinariamente un angolo piccolissimo, giacchè nel passaggio dal vetro nel Flint, ove accade una disperzione più grande che in ogni altro passaggio, si trova $d = r - p = 79°, 44'; 36'' - (77°, 58'; 33'') = 1°, 46', 3''$; cioè la massima disperzione non uguaglia due gradi.

166. Abbiamo veduto che il rapporto dei seni d'in-

cidenza, e di rifrazione pei raggi medj, o verdi è medio aritmetico proporzionale fra i rapporti de' seni d'incidenza, e di rifrazione de' raggi estremi rossi; e paonazzi (150), e che per conseguenza i rapporti de' seni d'incidenza, di rifrazione dei raggi rossi, verdi, e paonazzi formano una proporzione continua aritmetica, la cui ragione potrà esprimersi per N. Quindi se n:1 indichi per un dato mezzo il rapporto dei seni d'incidenza, e di rifrazione dei raggi medj, il rapporto di rifrazione de' raggi rossi meno refrangibili sarà n−N:1, e quello de' paonazzi che sono i più refrangibili n+N:1.

La ragione, o differenza N fra i rapporti di rifrazione de' raggi Rossi, verdi, e paonazzi assumesi generalmente a misura della forza dispersiva di un dato mezzo, ed appellasi eziandio da taluni forza dispersiva del mezzo.

Quando vogliasi trovare il valore di N per un dato mezzo, ad esempio, pel passaggio della luce dall'aria nel vetro, si determinerà per via d'immediato sperimento il valore di n:1 pei raggi

verdi che si è trovato essere (155) $= 1,50 : 1$, e quello dei raggi rossi $n - N : 1 = 1,54 : 1$, o quello de' paonazzi $n + N : 1 = 1,56 : 1$; dalla prima proporzione si ha $n = 1,55$, e dalla seconda $n - N = 1,54$; e sostituendo il valore di n si avrà $N = 1,55 - 1,54$, ossia $N = 0,01$ espressione della forza dispersiva del vetro quando il raggio venga dall'aria.

Similmente si troverà che dall'aria nel Flint $N = \frac{3}{200}$; dall'aria nell'acqua $N = \frac{5}{809}$; dal vetro nel Flint $N = \frac{2}{641}$ prossimamente &c.

167. Problema: Dato l'angolo d'incidenza i, e la ragione $n : 1$ dei seni d'incidenza, e di rifrazione dei raggi medj, e data la misura N della potenza dispersiva, trovare l'angolo di dispersione $\underline{d}$ dopo una sola refrazione del raggio bianco solare.

Soluz. Essendo i l'angolo d'incidenza del raggio solare, essa dovrà considerarsi angolo d'incidenza comune per tutti i raggi solari che risultano dalla refrazione: inoltre essendo $n : 1$ il rapporto di refrazione pe' raggi verdi, è manifesto, che $n - N : 1$ sarà quello de' raggi rossi (166); ed $n + N : 1$ quel-

lo de' raggi paonazzi. Esprimendo quindi per r', r'', r''' gli angoli di refrazione dei raggi rossi, verdi, e paonazzi, si avranno le seguenti proporzioni:

$sen\,i : sen\,r' :: n-N : 1$; $sen\,i : sen\,r'' :: n : 1$; $sen\,i : sen\,r''' :: n+N : 1$,

dalla prima si ha $sen\,i = (n-N)\,sen\,r'$; e dalla terza $sen\,i = (n+N)\,sen\,r'''$; quindi $(n+N)\,sen\,r''' = (n-N)\,sen\,r'$ (a). E per la natura del seno della refrazione dei raggi medj si ha $sen\,r' : sen\,r'' :: sen\,r'' : sen\,r'''$; quindi $sen\,r' + sen\,r''' = 2\,sen\,r''$. Eseguendo ora nell'equazione (a) le moltiplicazioni, e le riduzioni si avrà

$$sen\,r' - sen\,r''' = \frac{N}{n}(sen\,r' + sen\,r''') = \frac{2\,N\,sen\,r''}{n} \quad (a).$$

Ora si sa dalla trigonometria che $sen\,r' - sen\,r''' = 2\,sen\,\frac{1}{2}(r'-r''') \times cos\,\frac{1}{2}(r'+r''')$ (b); e poichè $r'-r'''$ esprimente l'angolo di dispersione è sempre piccolo (165), molto più piccolo sarà l'arco $\frac{1}{2}(r'-r''')$; quindi il suo seno non differirà dall'arco stesso; e perciò il primo fattore della formola (b) $2\,sen\,\frac{1}{2}(r'-r''')$ diverrà $= 2\,\frac{1}{2}(r'-r''') = r'-r''' = d$. Rispetto all'altro fattore $cos\,\frac{1}{2}(r'+r''')$ convien osservare che siccome r' differisce pochissimo da r''', ed essendo r'', refrazione de' raggi verdi, un angolo sensibilmente medio

aritmetico frà r', ed r''', si avrà prossimamente $r':r''::r'':r'''$; quindi $r'+r'''=2r''$, e $\cos\frac{1}{2}(r'+r''')=\cos r''$. Laonde la formola (b) diverrà $\text{sen}\, r'-\text{sen}\, r'''=(r'-r''').\cos r''=\partial.\cos r''$; e sostituendo questo valore nel primo membro dell'equazione (a) avremo $\partial.\cos r''=\frac{2\mathbf{N}\,\text{sen}\, r''}{n}$, quindi $\partial=\frac{2\mathbf{N}\,\text{sen}\, r''}{n\cos r''}=\frac{2\mathbf{N}}{n}\text{tang}\, r''$: e poichè l'angolo, o arco di dispersione ∂ è piccolissimo, è chiaro che esso non differirà sensibilmente dalla sua tangente, cosicchè abbiasi $\partial=\text{tang}\,\partial$; quindi $\text{tang}\,\partial=\frac{2\mathbf{N}}{n}\text{tan}\, r''$ (c). Giudico inutile l'avvertire, che l'angolo r'' è quantità cognita dipendente dall'angolo d'incidenza i, e dal rapporto di refrazione $n:1$ de' raggi medj, per cui si ha $\text{sen}\, r''=\frac{\text{sen}\, i}{n}$.

Così nel passaggio della luce solare dall'aria nel vetro si ha pei raggi medj $n:1::77,5:50$; ed $\frac{n}{1}=\frac{77,5}{50}=1,55$; $\mathbf{N}=\frac{1}{100}$ (166): quindi supposto l'angolo d'incidenza $i=23°,39',5''$, si troverà $\text{sen}\, r''=\frac{\text{sen}\, i}{n}=\frac{\text{sen}\,(23°,39',5'')}{1,55}=\text{sen}\, 15°$, pross: e per conseguenza $r''=15°$. Sostituendo questi valori nella formola generale (c), si avrà $\text{tang}\,\partial=\frac{2\,\text{tang}\, 15°}{100.(1,55)}=\text{tan}\, 0°.11',53''$ e perciò la cercata dispersione $\partial=11',53''$.

168. *Probl.* Dato l'angolo rifrangente $IAK = a$ (fig.^e 48) del prisma, e la forza dispersiva N del medesimo; dato inoltre l'angolo d'incidenza $HDE = i$ del raggio solare, e gli angoli di rifrazione dei raggi medj $LDC = m$; $FCG = m'$; e data finalmente la ragione $n : 1$ dei seni d'incidenza i, e di refrazione m, determinare l'angolo di dispersione $\underline{d}'$ dopo due rifrazioni.

Fig. a 48

Soluz. Poichè il raggio solare HD dopo la prima rifrazione in D si divide ne' sette raggi primitivi, dei quali DC'', DC, DC' rappresentano i rossi, i medj, ed i paonazzi, se pei punti di seconda incidenza C'', C, C' si conducano le normali V''F'', VF, V'F', emergeranno essi dal prisma nell'aria scostandosi dalle rispettive normali più di tutti i raggi paonazzi C'G, e meno di tutti i raggi Rossi C'G''. Ritenendo ora le denominazioni precedenti si faccia pei

raggi rossi	pei raggi medj	pei raggi paonazzi
$LDC' = p$	$LDC = m$	$LDC' = u$
$DC''V'' = q$	$DCV = i'$	$DC'V' = h$
$F''C''G'' = p'$	$FCG = m'$	$F'C'G' = u'$.

Ciò posto conviene osservare 1°. Che $p > u$, e

che $p-u$ angolo piccolissimo esprime la dispersione d dopo una sola refrazione: 2°. Che il raggio paonazzo DC' accostandosi alla normale EV' più che il raggio rosso DC'', l'angolo d'incidenza DC'V' sarà $>$ DC''V'', ossia $h > g$; 3°. Che emergendo i raggi dal prisma nell'aria si avrà evidentemente $u' > p'$; 4°. Prolungate le normali F''C'', F'C' finchè incontrino in V'', V' la normale d'incidenza EDL, si avrà $C''V''L = V''DC'' + V''C''D = p+g$, $C'V'L = V'DC' + V'C'D = u+h$; ma attese le parallele F'V', F''V'', si ha ang: $C''V''L = C'V'L$; dunque $p+g = u+h$; e $p-u = h-g$; ma $p-u = d = \frac{2N}{r} \tang m$ (167), dunque anche $h-g = \frac{2N}{r} \tang m$ (b): 5°. Che differendo pocchissimo frà loro gli angoli p, ed u; ed h; u, e p'; ed essendo m, i', m' angoli prossimamente medj aritmetici fra le accennate copie di angoli si avrà $p+u = 2m$; $g+h = 2i'$; $u'+p' = 2m'$; e per la stessa ragione si avrà $\sen p : \sen m :: \sen m : \sen u$; quindi $\sen p + \sen u = 2 \sen m$. $\sen g : \sen i' :: \sen i' : \sen h$; quindi $\sen g + \sen h = 2 \sen i'$ (c); $\sen u' : \sen m' :: \sen m' :: \sen p'$; quindi $\sen u' + \sen p' = 2 \sen m'$.

Ciò posto ognun vede, che il raggio medio DC

passando dal prisma nell'aria, la ragione de' seni di seconda incidenza; e di seconda refrazione sarà quella di $1:n$ (150): onde si avrà $\text{sen}\, i'' : \text{sen}\, m' :: 1 : n$; quindi $\text{sen}\, m' = n\, \text{sen}\, i''$ (e); $\text{sen}\, g : \text{sen}\, p' :: 1 : n-N$, quindi $(n-N)\, \text{sen}\, g = \text{sen}\, p'$; $\text{sen}\, h : \text{sen}\, u' :: 1 : n+N$; quindi $(n+N)\, \text{sen}\, h = \text{sen}\, u'$. Sottraendo la seconda dalla terza equazione si avrà $\text{sen}\, u' - \text{sen}\, p' = (n+N)\, \text{sen}\, h - (n-N)\, \text{sen}\, g$; eseguendo le moltiplicazioni indicate, e risolvendo in fattori avremo $\text{sen}\, u' - \text{sen}\, p' = n(\text{sen}\, h - \text{sen}\, g) + N(\text{sen}\, h + \text{sen}\, g)$. Ma dalla Trig: si ha $\text{sen}\, h - \text{sen}\, g = 2\, \text{sen}\, \frac{1}{2}(h-g) \times \cos \frac{1}{2}(h+g)$; e dall'equazione (c) si ha $\text{sen}\, h + \text{sen}\, g = 2\, \text{sen}\, i''$; sostituendo questi valori nell'equazione precedente si ha $\text{sen}\, u' - \text{sen}\, p' = n\left[2\, \text{sen}\, \frac{1}{2}(h-g) \times \cos \frac{1}{2}(h+g)\right] + 2N\, \text{sen}\, i''$ (d). Ma per gli stessi principj geometrici si ha $\text{sen}\, u' - \text{sen}\, p' = 2\, \text{sen}\, \frac{1}{2}(u'-p') . \cos \frac{1}{2}(u'+p')$. Ora poichè per natura del problema $u'-p'$ è un angolo piccolissimo, ed $u'+p' = 2m'$; $\text{sen}\, \frac{1}{2}(u'-p')$ non differirà da $\frac{1}{2}(u'-p')$; quindi si avrà $\text{sen}\, u' - \text{sen}\, p' = (u'-p') . \cos m'$. Sostituendo questo valore nell'equazione (d) avremo $(u'-p') \times \cos m' = n\left[2\, \text{sen}\, \frac{1}{2}(h-g) \times \cos \frac{1}{2}(h+g)\right] + 2N\, \text{sen}\, i''$. Osserviamo di nuovo, che essendo $h+g = 2i$,

ed $h-g$ un angolo piccolissimo, il sen $\frac{1}{2}(h-g)$ sarà $=\frac{1}{2}(h-g)$, e la precedente formola si ridurrà a $(u'-p')\cos m' = n[(h-g)\cos i''] + 2N \operatorname{sen} i''$; ma dall'equazione (*b*) si ha $h-g = \frac{2N}{n}$ tang $m = \frac{2N \operatorname{sen} m}{n \cos m}$; dunque sostituendo si avrà $(u'-p')\cos m' = \frac{2N \operatorname{sen} m}{n \cos m} \times \cos i'' + 2N \operatorname{sen} i''$: riducendo tutto allo stesso denominatore, e dividendo per $\cos m'$ troveremo $u'-p' = \frac{2N(\operatorname{sen} i'' \cos m + \cos i'' \operatorname{sen} m)}{\cos m \cos m'}$, ovvero $u'-p' = \frac{2N.\operatorname{sen}(i''+m)}{\cos m \cos m'} = d'$ angolo di dispersione dopo due refrazioni: e poichè questo angolo è piccolissimo, è chiaro, che $u'-p'$, ossia d' non differisce sensibilmente dalla sua tangente; quindi si avrà in generale tang $d' = \frac{2N.\operatorname{sen}(i''+m)}{\cos m \cos m'}$; ma (145) $i''+m = a$; dunque tang $d' = \frac{2N \operatorname{sen} a}{\cos m \cos m'}$.

Così posto come sopra (167) $i = 23°, 39', 5''$, $n = \frac{77,5}{50} = 1,55$; $N = \frac{1}{100}$; $m = 15°$; e supposto l'angolo rifrangente $a = 30°$, dall'equazione $a = m + i''$ si ha $i'' = a - m = 15°$; dall'equazione (*e*) si ha sen $m' = n$ sen $i'' = (1,55)$ sen $15° =$ sen $23°, 39', 5''$, quindi $m' = 23°, 39' 5''$. Sostituiti questi valori nella formola generale si troverà tang $d' = \frac{2.\operatorname{sen}.30°}{100.\cos 15° \times \cos(23°, 39', 5'')} =$ tang. $0°, 38', 52''$, e perciò l'angolo di dispersione $d' = 38', 52''$. Circa al prisma ad

angolo variabile veggasi Smith vol. II. pag. 489.

Nozioni Generali "intorno alle Lenti"

169. Finora non abbiamo considerato che i soli mezzi diafani terminati da superficie piane, parallele fra loro, come ne' cristalli, o inclinate come ne' prismi. Ma quale immensa varietà di figure non presenterà un mezzo diafano, qualora ad informarlo suppongansi concorrere le infinite superficie curve fra loro, e colla superficie piana congiunte, e combinate? Inutile, ed impossibil cosa sarebbe l'esaminare tutti i possibili casi di variate combinazioni, la massima parte delle quali non altro presenterebbe che astratte, ed infruttuose applicazioni di verità geometriche. Prescelte adunque quelle superficie, che rendono il mezzo rifrangente idoneo a produrre sorprendenti fenomeni; non parlerò che della combinazione delle superficie sferiche colle piane, dalla quale risultano quei corpi diafani tanto celebri, e conosciuti, detti comunemente Lenti, e che

a 6. classi principali ponno esser ridotte.

1°. Se il mezzo è piano ed'amendue le parti la lente è piano piana, e di essa abbiamo già bastantemente parlato nella teoria de' prismi, e de' cristalli. 2°. Se è piano da una parte, e dall'altra convesso, la lente dicesi piano convessa (fig.a 49). 3°. Se è convesso da amendue le parti, la lente dicesi convesso convessa, e se i raggi di curvatura sono uguali prende il nome di convesso convessa isosele (fig.a 50) 4°. Se il mezzo è piano da una parte, e concavo dall'altra la lente è piano concava (fig.a 51). 5°. Se è concava da amendue le parti, la lente appellasi concavo concava, e se i raggi di curvatura sono uguali, la lente è allora concavo concava isoscele (fig.a 52). 6°. Se il mezzo è convesso da una parte, e concavo dall'altra, dicesi la lente convesso concava, o menisco (fig.a 53).

Fig.a 49 Fig.a 50 Fig.a 51 Fig.a 52 Fig.a 53

170. Tutte le lenti hanno necessariamente circolare il loro bordo, poichè tutte risultano o dalla mutua intersezione di due superficie sferiche, o da quella di una sfera con un solido, che sempre si suppone

terminato da due piani paralleli.

L'aria circolare compresa entro il bordo della lente, chiamasi apertura della lente; il suo diametro è rappresentato da AB, ed il punto E posto alla metà di AB è il centro dell'apertura.

L'arco di circolo massimo ADB, o A'D'B' compreso fra due punti opposti A, B, ovvero A'B' del bordo circolare appellasi ampiezza circolare della lente: il punto D, o D' dividente per metà l'ampiezza arcuale dicesi centro dell'ampiezza: ognun vede, che questi punti sono ugualmente distanti da tutti i punti del bordo circolare delle Lenti.

L'asse della lente è una retta E.C, che passa pel centro di curvatura, e pel centro dell'ampiezza arcuale della lente. Esso è manifestamente normale al piano AB, o A'B' dell'apertura della lente. Nelle lenti convesso-convesse, o concavo-concave, e ne' menischi, l'asse passa necessariamente pei centri delle due sfere, o delle due curvature.

Chiamasi grossezza della lente quella porzione dell'asse CE compresa fra le due superficie della lente.

Centri delle Lenti

171. Considerando la lente MCND (fig.ª 54) come un poliedro d'infinite faccie, e supposto che un raggio di luce H'D entri nella lente in D, e ne emerga da C, se per C, e D stendansi i due punti tangenziali AI, BK, è chiaro che la refrazione si farà in uno stesso modo e nei piani tangenziali, e nella lente. Dovrà dunque intendersi delle lenti quanto si è detto finora de' prismi, e de' corpi diafani terminati da superficie piane, e parallele.

Fig.ª 54

Se dunque i due piani tangenziali AI, BK sono paralleli, il raggio emergente CG sarà parallelo all'incidente H'D (   ); e siccome paralleli pur sono i semidiametri, e raggi QD, PC, siccome normali rispettivamente ai piani tangenziali AI, BK, i due triangoli QOD, POC saranno simili; quindi QO : PO :: QD : PC, ed essendo in una data lente invariabile la ragione dei raggi di curvatura QD, PC, invariabile pure sarà la ragione dei due segmenti QO, PO dell'asse della lente, quindi il punto O, per cui passa

il raggio rifratto a direzioni incidente, ed emergente parallele, occupa nella lente un posto fisso, ed invariabile rispetto ai centri Q, P di curvatura. Laonde qualunque sia la posizione dei punti D, C, per cui passano le tangenti parallele AI, BK, il raggio rifratto passerà sempre pel punto O.

172. Reciprocamente se si divide la distanza PQ, o porzione dell'asse compresa fra i due centri Q, P, in due segmenti PO, QO tali che la ragione di esse sia uguale a quella de' raggi di curvatura PZ, QH, si avrà un punto O tale, che tirata per esso una retta qualunque CD incontrante la lente nei punti C, D, le tangenti condotte per questi punti saranno parallele. Imperocchè essendo opposti al vertice i due triangoli POC, QOD, ed avendosi per costruzione PO:QO::PZ:QH:: PC:QD, è chiaro che i due accennati triangoli sono simili, onde si avrà PC:CO::QD:QO, e l'angolo CPO=DQO; quindi i due raggi CP, DQ condotti ai due indicati punti d'incontro saranno paralleli; e parallele puranco saranno le due tangenti ADI, BCK, siccome normali ai suddetti raggi.

Se dunque suppongasi che CD rappresenti un raggio di luce, che dalla lente cristallina emerga nell'aria da amendue i punti D, C è chiaro che a motivo del parallelismo delle tangenti AI, BK, le direzioni DH', CG saranno fra loro parallele. Il punto O dottato delle singolari proprietà mentovate, appellasi centro di refrazione, o centro ottico, o semplicemente centro della lente. Questo punto esiste necessariamente sull'asse della lente.

173. Se dall'estremità N (fig.e 51) della superficie sferica MDN che ha maggior raggio di curvatura si conduca al suo centro Q il raggio QN, e dall'altro centro P della superficie MCN si tiri il raggio Pn parallelo a QN; le tangenti condotte per N, ed n saranno parallele fra loro siccome normali ai raggi paralleli QN, Pn; e poichè N è il punto estremo della superficie meno convessa MDN, è chiaro, che nella superficie più convessa MZN, il punto n sarà l'estremo de' punti corrispondenti a tangenti parallele; quindi preso l'arco Zn' = Zn, l'arco nZn' indicherà la porzione della superficie più convessa

MZN, nella quale esistono i punti corrispondenti all'intiera superficie MDN.

174. *Probl:* Trovare la posizione del centro di refrazione in una lente qualunque.

Soluz. Fatto $PZ = PC = r$ (fig.^e 54); $QH = QD = r'$ la grossezza della lente $HZ = g$; la distanza fra il centro O, e la superficie MZN espressa da $OZ = x$, e l'altra $OH = y$, si avrà immediatamente $OH = HZ - OZ$, ossia $y = g - x$. Inoltre $PO = PZ - OZ = r - x$; $QO = QH - HO = r' - g + x$. Ora avendosi (172) $PO : QO :: PC : QD$; sostituendo si avrà $r - x : r' - g + x :: r : r'$; d'onde si ricava $x = \frac{r}{r+r'} \times g$; quindi $y = \frac{r'}{r+r'} \times g$. Da queste due formole si ha la posizione, ossia la distanza del centro O dalle due superficie della lente. Esaminiamo partitamente le modificazioni delle precedenti formole secondo i varj valori dei raggi di curvatura.

1°. Se la lente è convesso-convessa isoscele, si ha $r = r'$; quindi $x = \frac{1}{2} g$; $y = \frac{1}{2} g$; quindi il centro O in tal lente esiste nel mezzo della grossezza HZ della lente.

2°. Se la lente è piano-convessa allora conver-

rà supporre che uno de' raggi di curvatura sia infinito. Supponiamo che tal sia il raggio $PZ = r = \infty$ allora la superficie MZN diventa piana, e r' svanisce rispetto ad r, e si ha $x = g$, ed $y = \frac{g}{\infty} = 0$; quindi il centro O sarà distante dalla superficie piana MZN quant'è la grossezza $g = HZ$, e dalla superficie convessa MHN la distanza sarà nulla: d'onde si vede, che nella lente piano convessa il centro di refrazione coincide col centro dell'ampiezza arcuale.

Infatti nella lente piano convessa MHN (fig.^a 55) non havvi che il solo centro d'ampiezza H, per cui si possa condurre una tangente parallela all'altra superficie piana MN; e tutti i raggi luminosi H'H, H"H, che entrano per H nella lente, ne emergeranno in direzioni parallele alle rispettive incidenti. Nella stessa maniera si dimostrerà, che nella lente concavo piana, il centro di refrazione H coincide col centro dell'ampiezza arcuale, giacchè pel solo punto H si può condurre una tangente parallela all'altra superficie MZN.

Fig.^a 55

175. In un modo analogo, e con poche modifica-

zioni nel segno de' raggi di curvatura opportunamente introdotte nelle due precedenti formole, si potrebbe determinare la posizione del centro di refrazione nelle altre specie di lenti. Ma praticamente è preferibile la seguente costruzione grafica, di cui ecco in breve il processo.

Supponiamo che debbasi trovare il centro di refrazione O (fig.ª 56) nella lente concavo-concava AA'E'E. A tal fine dai centri C, C' delle due superficie concave tiro i due raggi qualunque CB, C'B' perchè siano paralleli, ed esistenti sullo stesso piano che l'asse della lente CC'. Notati i punti B, B', per essi si tiri la retta BB' segante l'asse in O, che sarà il centro cercato di refrazione. Imperocchè essendo simili i due triangoli COB, C'OB', si ha CO : C'O :: CB : C'B', quindi con tale costruzione la porzione dell'asse CC' è divisa in parti aventi frà loro lo stesso rapporto che i raggi di curvatura, e per conseguenza il punto O sarà il centro di refrazione (172). Quindi per un raggio di luce FB' cadendo sulla lente in B' si rifrangerà secondo B'B ne emergerà secondo BG parallelo ad F'B'.

Fig.ª 56

Fig.ª 57

Similmente per trovare il centro di refrazione nel menisco AA'E'E (fig.ª 57), si tirerà primieramente l'asse CC'M, indi condotti dai centri di curvatura C'C, il raggi paralleli CB, C'B', si tiri la retta BB' prolungata sino all'asse in O che sarà il centro cercato. Imperocchè i due triangoli simili COB, C'OB' danno CO:C'O::CB:C'B', e qui pure si hanno le porzioni dell'asse comprese fra il centro di curvatura, e quello di refrazione, proporzionali ai raggi di curvatura. Onde si vede chiaramente che parallele saranno le tangenti condotte pei punti B, e B', e che per conseguenza se la retta BB' diretta al centro O rappresenti un raggio refratto, si dovrà conchiudere che il raggio incidente GB, e l'emergente B'F saranno paralleli.

Delle immagini, o fuochi prodotti da una sola refrazione.

Fig.ª 58

176. Rappresenti MPQL (fig.ª 58) un mezzo diafano indefinito p. e. un pezzo di vetro terminato superiormente dalla superficie sferica convessa ABL, il

cui centro è in C. Condotto per C l'asse indefinito ACF, suppungasi esistente in A un punto luminoso da cui slancisi obbliquo sulla lente il raggio lucido AE. Condotto pel punto d'incidenza E il raggio, o cateto CEH, e la retta DG parallela all'asse, è chiaro che AEH sarà l'angolo d'incidenza; e che l'angolo CEG è = BCE misurato dall'arco lenticolare BE. Ora ognun vede, che se il raggio AE entrando nel vetro non si rifrange in modo, che l'angolo di refrazione CEN non sia minore dell'accennato angolo CEG, il raggio rifratto EF o sarà parallelo all'asse, o divergerà da esso ed in ogni caso non potrà mai incontrarlo realmente.

Ora quando si tratti del passaggio dall'aria nel vetro, la sperienza ha dimostrato che l'angolo BAE formato dal raggio obbliquo AE coll'asse sia prossimamente uguale alla metà dell'angolo BCE formato al centro di curvatura, e misurato dall'arco lenticolare BE compreso frà l'asse, ed il punto d'incidenza E; ossia se la distanza AB dell'oggetto A dalla lente è all'incirca doppia del raggio di curvatura CB, allora il raggio refratto piegherà verso l'asse, e lo incontrerà.

in un punto qualunque F.

Infatti supposto, ad esempio, l'angolo BAE = AED = GEK = 4°; e l'angolo BCE = DEH = 8°, si avrà l'angolo d'incidenza AEH = AED + DEH = 12°, e poichè dall'aria nel vetro il rapporto di refrazione media è = 31 : 20, ed essendo l'angolo d'incidenza AEH = CEK, si avrà sen CEK : sen CEN :: 31 : 20; ovvero sen 12° : sen CEN :: 31 : 20, ossia sen CEN $= \frac{0,2079117 \times 20}{31} =$ sen 7°, 42', 32" quindi l'angolo di refrazione CEN = 7°, 42', 32" < 8° valore dell'angolo BCE. D'onde risulta che il raggio rifratto sarà convergente verso l'asse AF del mezzo rifrangente.

Che se restando l'angolo BCE = 8°, suppongasi BAE = 5°, ossia il punto luminoso A più avvicinato al mezzo, allora per via di un calcolo analogo al precedente si troverà l'angolo d'incidenza AEH = 13°, e l'angolo di refrazione = 8°, 20', 40", e per conseguenza > 8° valore dell'angolo BCE; quindi il raggio refratto sarà divergente dall'asse del mezzo rifrangente.

Finalmente conviene osservare, che se i due mezzi differiscono poco nella potenza rifrattiva, ossia se il rapporto di refrazione si accosti all'unità, l'an-

golo BAE deve essere molto minore della metà dell'angolo BCE, che val quanto dire l'oggetto A deve essere molto distante dalla superficie rifrangente onde il raggio refratto converga verso l'asse AF.

177. Ciò premesso, e supposto che il punto luminoso A trovisi alla distanza richiesta dalla legge superiormente esposta (176), determiniamo la posizione del punto F, in cui il raggio incidente AE supposto vicinissimo all'asse AB del mezzo convesso MBLQP incontra quest'asse dopo una sola refrazione.

Prolungato indefinitamente il raggio incidente AE, dal centro C si abbassi sopra di esso la normale CK, che rappresenterà il seno d'incidenza; e rappresentando per $p:q$ il rapporto della refrazione media, si faccia $p:q::CK$: ad un quarto termine CN, col quale, dal centro C, preso per raggio si descriva l'arco di circolo bNq al quale dal punto d'incidenza E si conduca la tangente NE, che prolungata taglierà l'asse in F. La normale CN sarà manifestamente il seno dell'angolo CEN; quindi la retta ENF esprimerà il cammino del raggio rifratto.

Per trovare analiticamente il valore della distanza, o lunghezza focale BF, esprimesi per d la distanza AB del punto luminoso dalla lente, per r il raggio $CB=CE$ della superficie sferica convessa, e per f la distanza focale BF: indi si osservi, che avendosi $CK:CN::p:q$, sarà $CK=\frac{p.CN}{q}$: ed essendo per ipotesi AE vicinissimo all'asse AB, l'arco BE potrà considerarsi rettilineo, e sensibilmente normale all'asse AB, quindi i due triangoli ABE, AKC rettangoli in B, ed in K saranno simili, e per la stessa ragione saranno simili i triangoli FBE, FNC. D'onde risultano le seguenti analogie, $AC:CK::AE:BE=\frac{CK.AE}{AC}$; $CN:BE\left(=\frac{CK.AE}{AC}\right)::FN:FB=\frac{CK.AE.FN}{AC.CN}$. Sostituendo ora il valore di CK, ed osservando, che attesa la supposta vicinanza $AE=AB=d$; $FN=FC=FB-CB=f-r$; $AC=AB+BC=d+r$, si avrà $FB=f=\frac{p.d(f-r)}{q(d+r)}$; d'onde si ricava $f=\frac{pdr}{pd-qd-qr}=\frac{pdr}{pd-q(d+r)}=\frac{pdr}{d(p-q)-rq}$ espressione generale della lunghezza focale f qualunque sia il mezzo rifrangente MQ. Se il raggio passi dall'aria nel vetro, allora si ha $p=31$, $q=20$; quindi sostituendo si troverà $f=\frac{31dr}{11d-20r}$.

178. Che se l'oggetto luminoso sia esteso cosicchè alcuni punti, come A', esistano fuori dell'asse, allora condotto per A', e pel centro C l'asse secondaria A'CF', e supposto A' costante distanza dalla lente, si conduca ad un punto E' vicinissimo all'asse un raggio luminoso A'E', e tirato il cateto d'incidenza CE', si faccia il restante del calcolo, e dell'operazione come pel raggio AE, e si troverà sull'asse secondario A'C il punto di concorso F' per cui passa il raggio refratto E'F'.

Quanto si è detto del raggio laterale AE deesi applicar a tutti i raggi incidenti sui punti dell'archetto BE, e su quelli dell'archetto uguale Be. Tutti questi raggi, e quelli pur anche che cadono sulla calotta sferica corrispondente all'arco eBE si uniranno fisicamente nel punto F, ed ivi dipingeranno un immagine sensibile del punto luminoso A. Lo stesso dicasi de' raggi lucidi, che dal punto luminoso A' cadono sulla calotta sferica E'B'e', il cui asse è A'B': tutti questi raggi si uniranno in F', ed ivi dipingeranno un immagine sensibile del punto luminoso A'.

Applicando i precedenti ragionamenti a tutti i punti dell'oggetto luminoso AA', si vedrà 1º Che di ciascun di essi si dipingerà una immagine esistente su quell'asse, che passa pel punto corrispondente dell'oggetto. 2º. Che dal complesso delle immagini parziali de' punti dell'oggetto AA' risulterà l'intera immagine F'F dell'oggetto luminoso AA'. 3º. Che incrocicchiandosi tutti gli assi nel centro C della superficie rifrangente, è chiaro che l'immagine sarà in posizione opposta a quella dell'oggetto. 4º. che se l'oggetto AA' sia concentrico, almeno sensibilmente alla superficie convessa MBL, cosicchè tutti i punti dell'oggetto siano ugualmente distanti dalla suddetta superficie; anche le distanze focali BF, B'F' saranno uguali; quindi essendo CB = CB', sarà anche CF = CF'; e per conseguenza l'immagine FF' avrà una figura circolare volgente il suo concavo alla superficie della lente. Questa conseguenza può estendersi eziandio a quei casi in cui l'oggetto AA' sia normale all'asse principale AB, molto lontano dalla lente, e poco esteso, poichè con tali condizioni tutti i punti suoi

sono prossimamente equidistanti dal centro C di curvatura, e per conseguenza ugualmente lontani dalla superficie convessa rifrangente MBL.

179. Supponiamo ora che il mezzo rifrangente MPQL (fig.ª 59) sia terminato da una superficie sferica concava MBL, il cui centro sia in C, ed abbia per asse principale la retta ACB, sul quale esiste un punto luminoso A, da cui diriggasi alla lente il raggio AE vicinissimo all'asse AB. Condotto dal centro C al punto d'incidenza E il cateto CEH, il raggio rifratto ED si accosterà a lui, e si allontanerà per conseguenza dalla direzione primitiva ET, e molto più dall'asse AB, cui per conseguenza non potrà incontrare entro il mezzo rifrangente, nè in alcun altro punto, a meno che mentalmente non fingasi che esso ritorni indietro seguendo la direzione rifratta DE, nella quale ipotesi incontrarebbe l'asse principale in un punto F, che appellasi per ciò foco immaginario, virtuale, o negativo.

Fig.ª 59

Per determinare la posizione di questo punto rispetto alla superficie rifrangente MBL, si of-

servi, che (177) CEA è l'angolo d'incidenza; che DEH = CEF è quello di refrazione: e che esprimendo per $p:q$ la ragione dei seni della refrazione media, ed abbassando da C la CK normale al raggio incidente AE, essa sarà il seno dell'angolo d'incidenza; quindi fatto $p:q::$ CK: ad un quarto termine CN, con esso si descriva l'archetto gNb, e dal punto d'incidenza E gli si tiri la tangente ENF, che per tal modo si avrà un angolo CEF, il cui seno sarà CN; e però il suddetto angolo sarà quello di refrazione, e la retta EF esprimerà la direzione del raggio rifratto preso in senso opposto.

Facciasi ora come nel (177) il raggio CB = r, la distanza AB = d, e la lunghezza focale immaginaria BF = f: fatte le osservazioni già esposte (177) si avrà AE = AB = d; FN = FC = FB − CB = $f-r$; AC = AB − CB = $d-r$, ed istituite le proporzioni risultanti dai triangoli rettangoli simili ABE, AKC; FBE, FNC, si troverà alla fine $f = \frac{pdr}{pd-qd+qr} = \frac{pdr}{pd-q(d-r)} = \frac{pdr}{d(p-q)+rq}$.
Se il raggio passa dall'aria nel vetro, si ha come sopra (177) $p=31$, $q=20$; quindi $f = \frac{31\,dr}{11\,d+20\,r}$ valore assoluto del foco cercato.

180. Se l'oggetto luminoso oltre il punto lucido A altri pure ne contenga situati fuori dell'asse principale, quale ad esempio è il punto A', si condurrà per esso, e pel centro C l'asse secondaria A'CB', indi supposto che un raggio lucido A'E' cada sulla lente in E' vicinissimo all'asse, si condurrà il cateto CE'; e con ciò si avrà l'angolo d'incidenza A'E'C; ed applicando a questo raggio i ragionamenti, e le osservazioni fatte pel raggio AE, si vedrà 1°. Che il foco immaginario del punto A', cadrà in un punto F' dell'asse secondario A'B'. 2°. che se l'immagine virtuale FF' dell'oggetto AA' potesse dipingersi, essa avrebbe una posizione simile al suo oggetto; imperocchè i raggi refratti si accostano bensì al cateto d'incidenza; ma non possono coincidere con esso, nel qual caso tutto al più cadrebbe nel centro C. 3°. che se l'oggetto AA' fosse concentrico almeno sensibilmente alla lente, anche l'immagine virtuale FF' sarebbe concentrica alla stessa lente, e presenterebbe ad essa la sua concavità.

Osservazioni sulle due Formole precedenti

Fig.

181. Esaminando attentamente la formazione, e la posizione dei fochi espressi nelle due fig 58, e 59, si vedrà di leggieri, che nella fig.ª 58 ove la distanza fra il punto luminoso A, ed il centro C, ciò è la retta AC è $= d + r$, anche la distanza AF è $= d + f$, vale a dire, quando il raggio di curvatura r è addendo alla distanza d, anche la distanza focale f è addenda alla stessa distanza d; e che per lo contrario nella fig.ª 59 in cui la distanza AC è $= d - r$, anche AF è $= d - f$; d'onde si vede in generale, che quando r è negativo, anche f è negativo, e viceversa. Per lo che se nella fig.ª 58 prendesi la distanza focale f positivamente, nel senso cioè di addizione alla distanza d, onde avere la giusta posizione del foco F rispetto all'oggetto A, ed alla superficie rifrangente MBL; nella fig.ª 59 la distanza focale $f =$ BF deve esser presa negativamente, ossia in senso di sottrazione della distanza $d =$ AB. Donde si vede che la formola del (179) $f = \frac{pdr}{d(p-q)+rq}$,

Fig.ª 58, e 59 — Fig.ª 58 — Fig.ª 59 — Fig.ª 58 — Fig.ª 59

la quale indica soltanto il valore assoluto della retta BF = f indipendentemente da qualsiasi relazione con altre linee deve neccessariamente esser affetta del segno negativo, onde si conosca che la relazione sua con una linea comune ad amendue i casi, che è la distanza AB = ∂ è opposta a quella che la distanza focale f nella fig.a 59 ha colla stessa distanza ∂: per lo che avremo $f = \frac{-p\partial r}{\partial(p-q)+rq}$ formola consimile all'altra $f = \frac{+p\partial r}{\partial(p-q)-rq}$ tranne i segni de' termini affetti dal fattore r, i quali sono opposti: onde si vede che essendo data la formola $f = \frac{p\partial r}{\partial(p-q)-rq}$ per le superficie convesse si poteva immediatamente ricavare quella per le superficie concave col semplice cangiamento dei segni nei termini affetti da r, ossia riguardando r negativo.

Ora riflettasi, che essendo in amendue i casi simili le circostanze, ed identiche le leggi di rifrazione, la differenza de' risultati rispetto alla posizione de' fochi non d'altra parte può derivare che dalla contraria relazione del

raggio di curvatura CB colla distanza AB dell'oggetto dalla lente: poichè come abbiamo già osservato nel primo caso, si deve aggiungere il raggio r alla distanza d per aver la distanza AC del punto luminoso dal centro di curvatura; e nell'altro caso (fig.ª 59) il raggio r deve essere sottratto da d per avere la stessa distanza. Non per altro motivo mi sono diffuso in queste osservazioni, che per esser autorizzato in seguito a modificare in casi analoghi le formole generali con semplici cangiamenti di segni richiesti da casi particolari, il che risparmia costruzioni, e calcoli penosissimi.

182. Riunendo in una sola le due precedenti formole, si vedrà che la lunghezza, o distanza focale per un mezzo convesso, o concavo, dopo una sola refrazione è rappresentata da $f = \frac{\pm pdr}{d(p-q) \mp rq}$, nelle quali i segni superiori valgono per le superficie rifrangenti convesse, e gl'inferiori per le concave. Che se trattisi del passaggio dall'aria nel vetro, allora si ha $f = \frac{\pm 31.dr}{11.d \mp 20r}$, e prossimamente $f = \frac{\pm 3dr}{d \mp 2r}$.

183. Finora noi abbiamo supposto, che i raggi incidenti AE, A'E'.... fossero omogenei, ed in tale ipotesi abbiamo determinati i fochi, o punti di concorso F, F' per ciascun fascetto lucido. Ma se i suddetti raggi fossero bianchi, ossia solari, ognun sa che dopo le refrazioni in E, E'.... ciascun se decomporebbe ne' sette raggi primitivi, e che i paonazzi siccome più refrangibili, si accosterebbero più che tutti gli altri al cateto d'incidenza CE (fig.e 58, 59) ed incontrerebbero per conseguenza l'asse AR in un punto p più vicino alla superficie rifrangente, che i raggi verdi, il cui foco è supposto cadere in F, e molto più che i rossi, che sono i meno refrangibili, e che per conseguenza si unirebbero in un punto più lontano r. Dal che si vede, che nello spazio pr si dipingeranno tante immagini del punto luminoso, e bianco A, quanti sono i raggi primigenj della luce, e che ridotti alla solita classificazione de' suddetti raggi, sette saranno le immagini dipinte nel suddetto spazio, che suolsi appellare _spazio di diffusione_. Lo stes-

Fig.a 58, e 59

so dicasi del punto luminoso A' supposto che esso pure sia bianco, del quale sull'asse secondario A'F' si formeranno sette immagini colorate, la prima, cioè la paonazza più vicina alla superficie in p', la verde in F', e la rossa in r'; Quindi si avranno di seguito sette complete immagini dell'intiero oggetto luminoso AA' cioè pp'... FF'....rr'; la prima paonazza, la media verde, e l'ultima rossa.

Fig.ª 59

Applicando questi ragionamenti alla superficie rifrangente concava (fig.ª 59), si vedrà che il raggio solare AE decomposto essendosi dalla refrazione in E ne' colori primitivi, il raggio paonazzo accostandosi di più al cateto d'incidenza CEH, se fosse prolungato in senso opposto incontrerebbe l'asse BA in un punto p più vicino alla superficie rifrangente, di quello che sia il punto F concorso virtuale de' raggi verdi: ed il punto F sarà più vicino alla detta superficie che il punto r, concorso virtuale de' raggi rossi, che sono i meno refrangibili. Lo stesso dicasi del raggio solare A'E'.

rispetto a cui i punti p', F', r' indicano i concorsi dei raggi paonazzi, verdi, e rossi coll'asse secondario A'E'. Quindi anche in questo caso avrebbe luogo l'indicata serie di sette immagini virtuali, e colorate dell'oggetto bianco AA', sparse nello spazio di diffusione immaginaria p r r' p'.

De' Fuochi delle Lenti dopo due Refrazioni

184. Per procedere con maggior chiarezza considero primieramente le lenti convesso-convesse, e dagli effetti che esse producono dedurrò con opportune modificazioni quelli, che nelle altre specie di lenti soglionsi osservare.

Suppongo adunque che siano dati i raggi di curvatura KA, CB (fig.ª 60) della lente convesso-convessa QASB, e che sia pur data la distanza OA di un punto lucido O posto sull'asse OP della superficie anteriore QAS della lente, la qual distanza io suppongo due volte all'incirca maggiore dell'uno o dell'altro de' raggi di curvatura, onde esser certo (176)

Fig. 60

che dopo le due rifrazioni il raggio incidente OI vicinissimo all'asse OA concorra in un punto F dell'asse principale. Non sarà difficile il determinare la posizione del foco F rispetto alla superficie posteriore QBS, ossia la distanza FB dopo le due refrazioni qualora si osservi primieramente, che avendo attribuito ad O una conveniente distanza dalla superficie rifrangente QAS (176) anche dopo la prima refrazione il raggio refratto IT incontrerebbe l'asse in un dato punto P.

Ciò posto sia la distanza AO = d, il raggio KA = r, l'altro raggio CB = r', la grossezza AB della lente = e, la lunghezza focale dopo una sola refrazione BP = z, e la cercata lunghezza focale dopo due refrazioni BF = f. Suppongo per ora che i raggi incidenti siano primitivi; e non solari, e che il rapporto de' seni di refrazione media all'ingresso nella lente sia espresso da $p:q$ e per conseguenza (150) all'egresso dalla lente da $q:p$.

Condotto al punto di prima incidenza I il cateto KIL, si avrà l'angolo d'incidenza OIL = KIG;

il cui seno è espresso dalla KG = n condotta dal centro K normalmente alla direzione incidente OG; quindi fatto $p:q::KG(n)$: ad un quarto $KH = \frac{nq}{p}$, col quale come raggio avendo descritto l'arco gHb, si tiri dal punto I la tangente IH, la quale esprimerà la direzione del raggio rifratto per la prima volta (176) e che se non venisse più rifratto incontrerebbe l'asse principale della lente nel punto P.

Ciò posto essendo AI un arco picolissimo, e per conseguenza sensibilmente rettilineo, e normale all'asse OP, i due triangoli rettangoli OAI, OKG saranno simili, e si avrà $OG:OA::KG:AI$; ora attesa la estrema vicinanza delle rette OG, OK, è chiaro, che OG è $= OK = OA + AK = d+r$; ed essendo $KG = n$, si avrà $d+r:d::n:AI = \frac{dn}{d+r}$. Parimente a motivo de' triangoli rettangoli simili PAI, PHK, si ha $PA:PH::AI:KH$; ma $PA = PB + BA = z+e$; PH siccome vicinissimo all'asse è $= PK = PA - AK = z+e-r$, $AI = \frac{dn}{d+r}$; $KH = \frac{nq}{p}$; quindi fatta la sostituzione si avrà $z+e:z+e-r::\frac{dn}{d+r}:\frac{nq}{p}$; fatto il valore degli estremi, e dei medj, e cavando il va-

lore di z, si troverà $z_{,} = \frac{deq + eqr + dpr - dep}{dp - dq - qr}$.

Ora conviene osservare che il raggio primamente rifratto in I non tiene la direzione IP che da I sino a T incontro dell'altra superficie QTS, dalla quale emergendo, ed entrando nello stesso mezzo più raro cui percorse prima di penetrare nella lente, si rifrangerà allontanandosi dal cateto CT condotto dal centro C di curvatura al punto di seconda incidenza T, e prendendo la direzione TF taglierà l'asse principale in F, che sarà il foco reale del punto luminoso O dopo due refrazioni.

Per determinare la posizione di questo punto, ossia la distanza BF, conviene osservare che il raggio IT cadendo sulla seconda superficie refringente QBS, forma l'angolo d'incidenza CTI, il cui seno è espresso dalla linea CD = m abbassata dal centro C sulla direzione del raggio IT; quindi poichè nel passaggio dalla lente nell'altro mezzo meno denso il rapporto di refrazione è espresso da q : p, si farà q : p :: m : ad un quarto

termine $CE = \frac{mp}{q}$, col quale come raggio avendo descritto l'arco $g'Eb'$, si condurrà da T la retta indefinita FTE tangente il suddetto arco, e che esprimerà evidentemente la direzione del raggio per la seconda volta refratto TF; cosicchè l'angolo FTL sarà l'angolo di seconda refrazione corrispondente all'angolo di seconda incidenza CTS. Ora essendo simili i triangoli rettangoli PCD, PBT si ha $PD : PB :: CD : BT$: per la già indicata vicinanza delle linee PD è $= PC = PB + BC = z + r'$; $PB = z$; $CD = m$; fatta la sostituzione si troverà $BT = \frac{mz}{z+r'}$. Parimente essendo simili i triangoli rettangoli FEC, FBT si avrà la proporzione $CF : BF :: CE : BT$; ma $CF = BF + BC = f + r'$; $CE = \frac{mp}{q}$; quindi $f + r' : f :: \frac{mp}{q} : \frac{mz}{z+r'}$; donde risulta $z = \frac{pr'f}{qf + qr' - pf}$, paragonando ora i due valori di z, e liberando f si troverà

$$f = \frac{dpqr' + deq^2r' - depqr' + eq^2rr'}{dp^2r' - dpqr' - pqrr' - deq^2 - dpqr + 2depq - dep^2 + dp^2r - eq^2r + epqr}$$

risolvendo in fattori si avrà

$$f = \frac{rr'q(eq + dp) - r'eqd(p-q)}{(r'pd + rpd + req)(p-q) - ed(p-q)^2 - rr'pq}. \text{ (A)}$$

formola generale determinante la lunghezza focale relati-

va ad un punto luminoso e raggi omogenei esis-
tente sull'asse di una lente convesso-convessa
dopo due refrazioni.

185 Se la lente è concavo-concava, quale è quel-
la che è rappresentata da QASS'Q' (fig.° 61), allora
fatto come sopra (184) $OA = d$; $KA = r$; $CB = r'$;
$AB = e$; $PB = z$; $BF = f$, si applicheranno a ques-
to caso i ragionamenti già esposti (184), osservan-
do solo che nella lente ora proposta il raggio in-
cidente OI in amendue le refrazioni in I, ed in
T diverge dall'asse principale; che $PA = PB - AB$
$= z - e$; $PH = PK = PA - AK = z - e - r$; $OG = OK$
$= d - r$; che $ITL' = CTD$ è l'angolo di seconda in-
cidenza, e che CTF' è l'angolo della corrispondente
seconda refrazione, si troverà per la lunghezza
focale immaginaria PF un valore, che preso ne-
gativamente diverrà $f = \frac{rr'q(eq+pd) + r'eqd(p-q)}{-(r'pd+rpd+req)(p-q) - ed(p-q)^2 - rr'pq}$ (B);
osservando ora che quando un raggio di luce passa
da un mezzo meno denso in uno più denso, per
esempio dall'aria nel vetro, si ha $p > q$, si vedrà
che il denominatore della precedente espressione è

per tale ipotesi necessariamente negativo.

186. Osserverò finalmente, che avremo potuto ottenere lo stesso risultato per la distanza focale f nelle lenti concavo-concave con semplice cangiamento di segno a due raggi di curvatura r, r' nella formola (A), giacchè questi raggi nelle lenti concavo-concave (fig.a 61) hanno una relazione colla distanza fra il punto luminoso, ed i centri delle due superficie refringenti anteriore, e posteriore, opposta a quella che essi hanno nelle lenti convesso-convesse. Infatti (fig.a 60) per avere la distanza OK fra il punto luminoso O, ed il centro K della superficie anteriore, si deve aggiungere il raggio KA = r alla distanza AO = d; e per avere la distanza OC fra l'oggetto, ed il centro C della superficie posteriore, si deve togliere dalla distanza OB = AO + AB = d + e del punto O alla superficie posteriore QBS il raggio di curvatura CB = r.'

Fig.a 61

Fig.a 60

Per lo contrario nella lente concavo-concava per avere la distanza fra il punto luminoso O.

ed il centro della superficie anteriore si deve sottrarre il raggio r di curvatura della distanza OA = d; e per ottenere la distanza OC del punto luminoso dal centro C della superficie posteriore, si deve aggiungere alla distanza OB fra il punto O, e la superficie posteriore il raggio di curvatura r.'

Quindi poichè in amendue i casi, simili sono i mezzi, e simile il processo del calcolo, chiaro è, che l'opposta posizione del calcolo, non d'altronde può provenire, che da quella sola circostanza; che ne' due casi trovasi opposta, vale a dire dalla posizione dei raggi delle curvature, che ne' due casi è opposta. Se dunque l'aver presi nella lente convesso-convessa positivamente i due raggi r, r,' ci ha condotti alla formola (A), prendendoli negativamente passeremo dalla lente convesso-convessa alla concavo-concava, ed avremo immediatamente la formola (B) relativa al foco immaginario di queste lenti.

187. Dalle precedenti osservazioni, e da quelle che altrove già furono esposte (181), chiaramente

rilevasi che la formola (A) (185) determinante la lunghezza focale FB dopo due refrazioni in una lente doppiamente convessa si applicherà.

1°. Alla lente piano-piana facendo $r = r' = \infty$.

2°. Alla lente piano-convessa facendo uno dei due raggi r, ovvero $r' = \infty$.

3°. Alla lente piano-concava prendendo uno dei due raggi r, r' negativamente, e l'altro infinito.

4° Alla lente concavo-concava prendendo negativamente amendue i raggi r, r' (186).

5°. Alla lente concavo-convessa, ossia al menisco prendendo uno dei due raggi positivamente, e l'altro negativamente.

6°. Alla sfera supponendo $r = r'$, e la grossezza della lente $= 2r$, cosicchè r, o r' sarà il raggio della suddetta sfera.

Foco de' punti lucidi esistenti fuori dell'asse principale delle Lenti

188. Prima di esporre i ragionamenti che imme-

diatamente guidano alla determinazione di questi punti, util cosa sarà il premettere alcune osservazioni che molto appianeranno la strada in sì difficile ricerca. Conviene adunque osservare.

1°. Che essendo i punti d'incidenza I, T (fig.a 60) vicinissimi all'asse principale PO, le tangenti IR, TR per essi condotte poco si scosteranno dalle tangenti parallele AA', BB' condotte pei centri A, B delle ampiezze delle due superficie; quindi l'angolo IRT formato dalle due prime tangenti sarà piccolissimo, ed essendo anche piccolissimo l'angolo d'incidenza OIL, atteso che il raggio OI è quasi normale alla superficie della lente, ognun vede, che l'angolo di doppia deviazione OVE $=\delta$ sarà uguale alla metà dell'angolo rifrangente IRT $=\alpha$ (161), quindi $\delta=\frac{\alpha}{2}$. Egli è inoltre evidente, che le refrazioni del raggio OI succedono nella lente nello stesso modo che succederebbero nel prisma IRT.

Fig.a 54

2°. Supposto H' un punto luminoso (fig.a 54) collocato fuori dell'asse principale della lente,

è chiaro, che frà gl'infiniti raggi H'a, H'a'.... che da esso si slanciano sulla superficie MHN, ve ne sarà uno, per esem: HD che rifrangendosi in D passerà pel centro di refrazione O della lente, ed emergerà quindi (172) nella direzione CG parallela all'incidente H'D. Siffatto raggio di luce che partendo da un punto lucido esistente fuori dell'asse della lente, passa pel suo centro di refrazione, chiamasi raggio principale. Gli altri raggi H'a', H'a.... che gli stanno attorno diconsi raggi secondarj, o laterali.

Se la grossezza HZ della lente sia per se piccola, o tale almeno possa considerarsi relativamente alla distanza H'O fra il punto luminoso ed il centro di refrazione, allora le due direzioni parallele H'D, CG de' raggi principali saranno sensibilmente congruenti colla retta condotta pel punto H', e pel centro O. Dunque se in tal caso che è il più frequente, sia data la posizione di H', e del centro O di refrazione, si avrà la posizione del raggio principale conducendo per H', e per

o la indefinita H'OG.

Fig.ª 62

3.º Se dal punto luminoso G (fig.ª 62) esistente fuori dell'asse CC' della lente, e posto a notabile distanza dal centro ottico M, cosicchè condotto il raggio principale GM, ed i raggi laterali GF, GK nei punti F, e K della lente sensibilmente distanti dal raggio principale, siano non pertanto piccoli gli angoli FGB, KGB, i due raggi dopo le due refrazioni convergeranno verso il raggio principale, e lo incontreranno in un qualunque punto H.

A dimostrare questa verità analoga a quella che altrove è stata dichiarata (176), e per conseguenza dipendente e dai rapporti di refrazione, e dalla maggiore, o minore divergenza de' raggi laterali incidenti, per cui in alcuni casi essa non ha luogo, non altra via più opportuna può assumersi che quella di calcolare esattamente la posizione del raggio incidente, rifratto, ed emergente rispetto al raggio principale GH, e dedurre quindi le enunciata convergenza. A tal fine suppongo che il raggio lucido GF dall'aria passi in una lente

vitrea; che l'angolo FBG sia $=6°$; e l'angolo d'incidenza GFL $= i = 70°$; quindi esso 31:20 il rapporto de' seni di rifrazione media, si troverà l'angolo di refrazione $E.FC' = r' = 37°, 19', 12''$; quindi il raggio rifratto FE incontrerà la superficie posteriore nel punto E. Condotte per F, ed E le due tangenti FA, AE, esse esprimeranno il prisma in cui le rifrazioni accadrebbero, come accadono nella lente. Misuro l'angolo rifrangente FAE, che suppongo $= 15°$, ed osservo che se il raggio rifratto avesse la direzione F'E' parallela al raggio principale GH, non succederebbe di più l'accennato incontro, ed in tale ipotesi l'angolo di rifrazione sarebbe $E'FC' = NFC' - NFE' = LFG - FGB = 70° - 6° = 64°$; ma poichè l'angolo di refrazione non è che di $37°, 19', 12''$, è manifesto che il raggio rifratto FE convergerà verso il raggio principale cui incontrerebbe in Q se non vi fosse l'altra refrazione.

Ora si osservi, che nel triangolo FAE, l'angolo AFE è $= AFC' = E.FC' = 90° - 37°, 19', 12'' = 52°, 4', 48''$; l'angolo rifrangente $A = 15°$; quindi $AEF = 112°. 19'. 12''$.

Condotta pel punto di seconda incidenza E la normale EL, si avrà l'angolo di seconda incidenza FEL $= i'' =$ AEF $-$ AEL $= 112°, 19', 12'' - 90° = 22°. 19'. 12''$ risultato che concorda con quello che si ottiene dall'equazione $a = r' - i''$ (143) che ha luogo quando l'angolo AEF è ottuso, ossia quando il raggio incidente cade fra la normale, e l'apertura del prisma.

In tal caso ognun vede, che il raggio FE emergendo dal vetro nell'aria si scosterà dalla normale EP formando con essa l'angolo di refrazione PEH $= r''$, il cui valore si troverà per mezzo della seguente proporzione sen i'', ossia sen $(22°. 19. 12'')$: sen r'' :: $31 : 20$, donde risulta r'' = PEH $= 36°. 3'. 40''$.

Osservisi ora, che se il raggio emergente EH fosse parallelo al raggio principale GH, allora dovrebbe avere la posizione EH', ed in tale ipotesi l'angolo di refrazione sarebbe H'EP = H'EQ + QEP = EFE' + QEP = E'FC + FEL $= 64° - (37°. 19'. 12'') + 22°, 19'. 12'' = 49°$. Quindi poichè l'angolo di seconda refrazione PEH è minore di H'EP, è manifesto che il raggio emergente EH benchè

si allontani un poco dalla normale EP, non pertanto incontrerà ancora il raggio principale in H.

Applicando questi ragionamenti all'altro raggio laterale GK, e supponendo, che l'angolo BGK sia = 4°; l'angolo d'incidenza GKR = 29°; e l'angolo rifrangente KDV = 38°, si dimostrerà che anche questo raggio dopo le due rifrazioni, sebbene percorra come l'altro un cammino parte saliente, e parte rientrante rispetto al raggio principale GH, pure lo incontrerà in un punto qualunque H.

Poichè dunque al raggio principale GH si dirigono dopo due refrazioni i raggi lucidi provenienti dal punto luminoso G, ognun vede, che ove in qualche punto per esem: in H ne concorra notabil copia ivi dipingerassi un immagine, o foco sensibile del punto luminoso G.

189. Segue da tutto ciò, che se un punto poco lontano B (fig.ª 63) dall'asse AF della lente convesso-convessa MN mandi raggi di luce sul piccolo archetto PR della lente, divisa prossimamente per

Fig.ª 63

metà dall'asse principale BOF, e supposto, che i punti dell'oggetto luminoso AB equidistino dal centro ottico O, allora l'immagine del punto B verrà dipinta in f ad ugual distanza dal centro O, che l'immagine F del punto A esistente sull'asse della lente.

Imperocchè essendo B poco distante da A, ed essendo attesa la tenue grossezza delle lenti il centro O poco distante dalla superficie refringente, è chiaro, che il raggio principale BOF taglierà la superficie anteriore in un punto c vicinissimo al centro a dell'ampiezza della lente, per cui passa l'asse principale AF. Ora se prendansi i due archi uguali aR, aP, e si tirino ai punti P, R i raggi AR, AP, BR, BP, la posizione dei secondi rispetto al loro raggio principale Bc, ed alla lente sarà sensibilmente uguale a quella dei raggi AP, AR rispetto al loro asse, ed alla lente; le rifrazioni succederanno presso a poco nello stesso modo negli uni, e altri; e però la immagine f del punto B si

troverà prossimamente alla stessa distanza dal centro ottico O, che l'immagine F del punto A; quindi si avrà $Of = OF$: ma per la picciolezza dell'angolo bOd si ha $bO = dO$; quindi sottraendo questa equazione dalla precedente si avrà $Of - Od = OF - Ob$, ossia $df = bF$: e poichè la formola generale (A) (184) esprime il valore della distanza focale bF, è evidente che essa esprimerà eziandio la lunghezza focale df per un punto B distante poco dall'asse, e distante quanto A dal centro della lente.

Si può dimostrare la stessa verità per mezzo della considerazione de' prismi formati dalle tangenti condotte pei punti medj e, c e pei laterali P, Q.

Applicando questi ragionamenti alla lente concava (fig.^a 61) SQ', si vedrà che se da un punto O' situato a poca distanza dall'asse si tiri il raggio principale O'V, ed un raggio secondario O'T' ad esso vicinissimo, dopo le due refrazioni prenderà la direzione T'Z, che prolungata in senso opposto incontrerà il raggio principale in

Fig.^a 61

un punto F'' prossimamente ad ugual distanza dalla lente che il foco negativo F: per tal modo risulterebbe l'immagine virtuale F'F'' se i raggi potessero retrocedere: e poichè quest'immagine formerebbesi prima dell'incrocchiamento de' raggi principali nel centro ottico V, è chiaro che la supposta immagine avrebbe una posizione simile al suo oggetto OO'.

190. Dal fin qui detto chiaramente rilevasi 1°. che l'immagine di ciascun punto luminoso A...B (fig.^a 63) esiste sempre sul raggio principale condotto da questo punto. 2°. Che incrocicchiandosi tutti i raggi principali nel centro ottico O, l'immagine reale f deve esistere rispetto all'asse della lente in parte opposta a quella in cui trovasi il suo oggetto B; e per conseguenza l'intiera immagine Ff dell'oggetto AB deve essere rovesciata rispetto a lui. 3°. Che tutti i punti dell'oggetto AB siano ugualmente distanti dal centro ottico O, o, ciò che è lo stesso, se AB sia un arco di circolo descritto dal punto O come centro,

Fig.^a 63

anche tutti i punti dell'immagine Ff saranno ugualmente distanti da O, e per conseguenza l'immagine Ff avrà una forma circolare, e presenterà il suo concavo alla lente. 4.° Supposto, come sopra, AB un arco di poca estensione, cosicchè possa considerarsi come una retta normale all'asse AF, anche la sua immagine arcuale Ff potrà risguardarsi come una retta normale all'asse; quindi risulteranno i due triangoli rettangoli simili BAO, OFf, nei quali si ha AB : BO :: OF : Ff; donde si vede, che la dimensione lineare dell'immagine fF è una quarta proporzionale fra la dimensione omologa dell'oggetto, alla sua distanza dal centro della lente, e alla distanza dell'immagine dello stesso centro. 5.° Se l'oggetto AB sia rettilineo, normale all'asse, non molto esteso, e notabilmente distante dalla lente, tutti i punti suoi saranno sensibilmente equidistanti dal centro O della lente, e però la sua immagine Ff sarà pur essa sensibilmente circolare. Quella curva sulla quale cadono gli apici de' coni lumi-

nosi, e dipingesi in conseguenza l'immagine di un oggetto esteso, verrà in seguito appellata curva focale: ed in generale quando si tratterà del foco di una lente, s'intenderà sempre per la parola foco la suddetta curva focale; così se si dirà che un oggetto è nel foco di una lente, s'intenderà che esso giace, e coincide coi punti di questa curva.

191. Poichè le immagini de' punti luminosi collocati fuori dell'asse della lente risultano dai vertici F, f, ... dei coni lucidi formati dai raggi emergenti dalla lente, ognun vede, che non si potrà vedere esattamente dipinta sopra una superficie l'immagine intiera Ff di un oggetto a meno che la suddetta superficie non sia di tal figura, e talmente situata, che tutti gli apici F, f.... de' coni lucidi cadano esattamente sopra di essa. Così se la superficie pongasi in DE, si vedrà allora dipinta sopra di essa l'immagine Ff con tal precisione, ed armonia di parti, che indarno sperar potrebbesi simil lavoro dal più esperto.

pittore. Ma se la tavola DE trasportisi in D'E',
allora taglierebbe tutti i coni lucidi, e l'immagi-
ne di ciascun punto lucido A, B.....sarebbe spar-
sa sopra le sezioni prossimamente circolari rs..
.....tu; e poichè queste sezioni in parte macchie-
rebbonsi, o si sovrapporebbero insieme, l'immagine
diverrà allora confusa, e mal terminata. Similmen-
te se pongasi la superficie in D''E'', allora taglie-
rebbe i coni lucidi opposti ai precedenti formati
dagli stessi raggi lucidi, i quali dopo essersi riuni-
ti, ed incrocicchiati nei fochi F.....f divergono, e
formano gli accennati coni opposti; le sezioni dei
quali fatte dal piano D''E'' sono rappresentate
dalle aree sensibilmente circolari r's'.....t'u'.

192. Finalmente conviene osservare, che potendosi
in molti casi considerare circolare anche l'imma-
gine Ff di un oggetto rettilineo (190), è chiaro,
che se a raccoglierla facciasi uso di una super-
ficie piana, non potrà a rigore cadere sopra di
essa, che un solo fra gl'infiniti vertici de' coni
luminosi, e presa la cosa fisicamente, non si

dipingerà con esatezza sul piano che quella sola porzione d'immagine, che a piccola distanza dipingesi all'intorno dell'asse, o di quel raggio principale che è normale al piano proposto. Per lo che se vogliasi vedere tutta l'immagine esattamente dipinta sopra una superficie, converrà prendere una superficie sferica concava avente per raggio la distanza focale, e collocarla in modo, che il centro di esso coincida col centro O di refrazione.

Inoltre deesi osservare, che sebbene il raggio principale BO, ed alcuni de' suoi raggi principali fossero intercettati da qualche ostacolo, onde non potessero arrivare alla lente MN, come se con un pezzo di carta si coprisse tutta la porzione NRc della lente; ciò non pertanto tutti gli altri raggi laterali BP..... non impediti concorrerebbero dopo due refrazioni nel punto f situato sul prolungamento ideale af del raggio principale, ed ivi dipingerebbero un immagine B, la quale però non avrà la stessa

chiarezza che avrebbe se gli accennati raggi non fossero rattenuti.

Semplificazione della Formola generale (A).

Posizione e Movimento delle immagini.

193. Poichè la grossezza $AB = e$ (fig.a 60) della lente è quasi sempre una quantità piccolissima rispetto ai raggi di curvatura, ed alla distanza dell'oggetto, chiara cosa è che senza timore di error sensibile si potrà il più delle volte supporre $e = 0$; quindi la formola (A) (184) si ridurrà a $f = \frac{rr'qd}{d(r+r')(p-q) - rr'q}$ (C). formola che si può facilmente addattare a tutte le specie di lenti. Imperocchè supposto

Fig. 60

1°. $r = r'$ si avrà la distanza focale della lente convesso-convessa isoscele $f = \frac{rqd}{2d(p-q)-rq}$.

2°. posto $AK = r = \infty$, la lente sarà piano covessa, e presenterà all'oggetto O la sua superficie piana, la distanza focale sarà $f = \frac{r'qd}{d(p-q)-r'q}$; e se pungasi il raggio $CB = r' = \infty$, la lente presenterà all'oggetto O la sua convessità, e si avrà

$f=\frac{rqd}{d(p-q)-rq}$; quindi se $r=r'$, ossia se abbiansi due lenti piano convesse aventi lo stesso raggio di curvatura; e che una presenti all'oggetto la superficie piana, e l'altra la superficie convessa, supponendo sempre costanti d, p, q. la lunghezza focale sarà la stessa in amendue i casi.

Ma se ritengasi nel calcolo la grossezza e della lente; allora l'immagine è nel primo caso meno distante dalla superficie convessa posteriore, che nell'altro caso dalla superficie piana posteriore. Imperocchè supposto nella formola generale (A) (184) $r=AK=\infty$ la formola si riduce a $f=\frac{r'q(eq+pd)}{(pd+eq)(p-q)-r'pq}$; e supposto $CB=r''=\infty$, si ha $f=\frac{rq(eq+pd)}{pd(p-q)-rpq}$: quindi supposto $r=r'$; onde le due lenti abbiano la stessa superficie sferica refringente, si vedrà che il primo valore di f è minore del secondo.

3°. Se la lente è concavo-concava; allora i raggi di curvatura r r' hanno una posizione opposta a quella che hanno nelle lenti convesso-convesse; quindi (186) si avrà $f=\frac{-rr'qd}{+d(r+r')(p-q)+rr'q}$ (B).

Nella stessa maniera si troverà la formola propria a ciascuna lente nell'ipotesi di $e=0$.

194. Ritenuta la formola (C) (193) cerchiamo ora quali siano per essere le distanze focali f. corrispondenti ai diversi valori della distanza d dell'oggetto dalla lente; Ed incominciando dalle lenti convesso-convesse è manifesto 1°. che il valor di f sarà sempre positivo; ossia addittivo alla distanza d dell'oggetto dalla lente (186) ogni qual volta il termine $d(r+r')(p-q)$ del denominatore sia $> rr'q$; e che f sarà negativo, ossia sottraendo dalla distanza d quando il suddetto termine sia $< rr'q$. 2°. Se $d(r+r')(p-q)=rr'q$. allora si avrà $f=\frac{rr'qd}{0}\infty$. Donde si vede, che se nelle lenti convesso-convesse abbiasi $d>\frac{rr'q}{(r+r')(p-q)}$, che come vedremo fra poco, esprime la lunghezza del foco de' raggi incidenti paralleli, il foco è positivo, o reale, quindi i raggi emergono convergenti: se $d=\frac{rr'q}{(r+r')(p-q)}$ il foco è a distanza infinita, e per conseguenza i raggi laterali di ciascun cono lucido emergono paralleli ai rispettivi raggi principali:

finalmente se $d < \frac{rr'q}{(r+r')(p-q)}$, il foco è negativo, ed i raggi emergono dalla lente divergenti dai loro raggi principali, cui non possono incontrare a meno che non suppongansi prolungati in senso opposto alla loro natural direzione.

195.° Se nella formola (C) suppongasi la distanza $d = \infty$, allora $f = \frac{rr'q}{(r+r')(p-q)}$ (D) espressione della lunghezza focale quando il punto luminoso è lontanissimo dalla lente; caso in cui i raggi incidenti sono sensibilmente paralleli ai loro rispettivi raggi principali. Ora avendo trovato (194) che i raggi escono dalla lente paralleli ai raggi principali quando d è $= \frac{rr'q}{(r+r')(p-q)} = f$, si vedrà facilmente che il foco de' raggi incidenti paralleli è uguale a quella distanza in cui dovrebbe esser collocato un oggetto luminoso affinchè i raggi emergenti fossero paralleli. Donde raccogliesi che collocato un oggetto luminoso nel foco de' raggi paralleli, i raggi divergenti da esso mandati sulla lente, emergeranno paralleli. La distanza focale corrispon-

dente ai raggi incidenti paralleli appellasi *foco principale*.

196. Ciò posto se i raggi cadono paralleli 1° sopra una lente convesso-convessa isoscele, fatto nella formola (D) $r = r'$ si avrà il foco principale $f = \frac{q^2}{2(p-q)}$. 2°. Se la lente è piano-convessa, espresso per r' il raggio di curvatura si avrà il foco principale $f = \frac{qr'}{p-q}$; e se il raggio r' di questa lente sia uguale a quello r della lente isoscele si avrà $f = \frac{qr}{p-q}$: donde si vede che in questo caso il foco principale di questa lente è il doppio più lungo di quello della lente convesso-convessa avente lo stesso raggio che la piano-convessa.

Nella stessa maniera si determinerà il foco principale in qualsiasi specie di lenti.

Supponendo ora che la luce passi dall'aria nelle lenti vitree, si avrà $p = 31$; $q = 20$; quindi per le lenti convesso-convesse isoscele il foco principale sarà $f = \frac{20}{22} r = r$ prossimamente, vale a dire uguale al raggio di curvatura: per le piano-convesse si troverà $f = \frac{20}{11} r = 2r$ pross:

vale a dire uguale al diametro di curvatura, e così delle altre.

Allorchè senza far menzione alcuna della distanza dell'oggetto dalla lente, si dice che una lente ha un dato foco, per esem: di 3. piedi, di 5. pollici &c. intendesi sempre di parlare del foco principale de' raggi paralleli.

197. Finalmente se $d=0$, ossia se i punti dell'oggetto luminoso AB siano a contatto della superficie anteriore MAN (fig.^a 63) della lente, allora la grossezza $b=e$ della lente non è più evanescente rispetto alla distanza d; quindi la formola generale (A) (184) darà $f=\frac{r'eq}{e(p-q)-r'p}$: e siccome $e<r'$; $p-q<p$, è chiaro, che $e(p-q)<r'p$; quindi il valore di f sarà anche in questo caso negativo, ossia i raggi emergeranno divergenti.

Fig.^a 63

198. Teor: A qualsiasi lente si può sempre sostituire una lente isoscele, che abbia lo stesso foco che quella.

Dimost. Presa in primo luogo la formola generale (E) (193) relativa alle lenti convesse;

si divida il numeratore, ed il denominatore di essa per $\frac{2}{r+r'}$, e si avrà $f=\frac{\partial q \times \frac{2rr'}{r+r'}}{2\partial(p-q)-\frac{2rr'}{r+r'}}$; facciasi $\frac{2rr'}{r+r'}=r''$, e si avrà $f=\frac{\partial q r''}{2\partial(p-q)-qr''}$: confrontando questa formola con quella del 1°. caso del (193). si vedrà che essa esprime il foco di una lente convesso-convessa isoscele, il cui raggio di curvatura è r''. Il valore di questo raggio è dato dall'equazione $\frac{2rr'}{r+r'}=r''$, da cui risulta la proporzione $r+r':2r::r':r''$. Per tal modo si avrà una lente isoscele, che avrà la stessa lunghezza focale che la proposta lente convesso-convessa avente i raggi di curvatura r, r'.

Questo teorema può facilmente estendersi a tutte le specie di lenti. Se per esempio vogliasi sostituire una lente convesso-convessa isoscele ad una piano convessa, si osserverà che queste due lenti devono avere lo stesso foco, e che per conseguenza la formola del caso 2°. (193), deve esser uguale alla formola poco fa trovata; quindi si avrà $\frac{r'q\partial}{\partial(p-q)-r'q}=\frac{r''q\partial}{2\partial(p-q)-qr''}$; donde risulta $2r'q\partial^2(p-q)-r'r''q^2\partial=r''q\partial^2(p-q)-r'r''q^2\partial$,

riducendo si troverà $r''=2r$; vale a dire che il raggio di curvatura delle lenti isosceli deve essere doppio di quello delle lenti piano-convesse.

199. Teor. Trascurata la grossezza della lente, se si collochi l'oggetto luminoso nel sito in cui dipingevasi prima la sua immagine, il nuovo foco di esso si troverà a quella distanza stessa dalla lente, nella quale prima trovavasi l'oggetto luminoso; cosicchè il foco, e la distanza dell'oggetto luminoso si possono sempre permutare.

Dimost. Infatti se dalla formola generale (C) (193) si ricavi il valore di $\underline{d}$ espresso per f, si troverà $d=\frac{fqrr'}{f(r+r')(p-q)-rr'q}$; questa formola altro non è che l'espressione di una lunghezza focale corrispondente alla distanza f dell'oggetto luminoso dalla lente (193).

200. La formola generale (C)(193) può risolversi nella seguente proporzione $d(p-q)(r+r')-qrr':qrr'::d:f$; e divisi i termini del primo rapporto per $(p-q)(r+r')$ si avrà $d-\frac{qrr'}{(p-q)(r+r')}:\frac{qrr'}{(p-q)(r+r')}::d:f$; ma $\frac{qrr'}{(p-q)(r+r')}$ esprime (193) il foco principa-

le della lente; dunque se esso esprimasi per φ, la precedente proporzione si trasformerà in $d-\varphi : \varphi :: d : f$; quindi $f = \frac{\varphi d}{\varphi - d}$ espressione semplicissima della formola generale (C).

Fatte le stesse osservazioni sulla formola propria alle lenti concavo-concave (193. caso 3°), si troverà $f = \frac{-\varphi d}{d+\varphi}$ valore relativo alla posizione; l'assoluto sarebbe $f = \frac{\varphi d}{d+\varphi}$.

Da queste formole facilmente si può ricavare il foco principale di una lente quando si conosca da immediato sperimento la lunghezza focale f corrispondente ad una data distanza d dell'oggetto dalla lente. Imperocchè la prima di esse dà immediatamente la lunghezza focale principale $\varphi = \frac{f \cdot d}{f+d}$, donde si ha $f+d : d :: f : \varphi$, cioè la distanza dell'oggetto al suo foco espressa da $f+d$, sta alla distanza dell'oggetto dalla lente, come la data lunghezza focale, sta alla lunghezza del foco principale.

Se nella formola $f = \frac{\varphi d}{d-\varphi}$ suppongasi la distanza $d = \varphi$, che val quanto dire, l'oggetto lumi-

noso collocato nel foco de' raggi paralleli, o nel foco principale, allora si ha $f = \frac{p^2}{0} = \infty$; quindi la lunghezza focale sarà infinita, ossia i raggi emergenti saranno paralleli ai rispettivi assi principali: risultato conforme al già trovato. (199).

Ora qui conviene osservare, che se per qualche ostacolo, o per essere il punto luminoso A, che io suppongo collocato nel foco principale della lente (190) MN (fig.ª 64) di tal natura da non poter mandare che pochi raggi lucidi AD, At sulla suddetta lente, si potrà sempre determinare la direzione de' raggi emergenti, nella seguente maniera. Pel dato punto A, e pel centro ottico O della lente, che pur deve esser dato si condurrà mentalmente la retta AOH, la quale esprimerà la direzione del raggio principale: indi determinati i punti o, n d'emergenza dei suddetti raggi AD, At, si tireranno le rette oa, np parallele ad OH, e queste esprimeranno le direzioni, e la posizione de' suddetti raggi emer-

Fig.ª 64

genti. Questa costruzione è di uso continuo nella teoria de' Telescopj, e de' Microscopj.

Se suppongasi la distanza $\delta = 2\varphi$, si troverà anche $f = 2\varphi$; dunque quando la distanza dell'oggetto dalla lente è doppia della lunghezza focale principale, la lunghezza focale f è uguale alla distanza dell'oggetto dalla lente; e la somma delle due distanze $\delta + f$, ossia la distanza dell'oggetto dal suo foco è in questo caso $= 4\varphi$ minimo valore di questa distanza, come è facile il dimostrare colla nota teoria de' massimi, e dei minimi (veggasi Scheuffer. Diottrica pag: 12). o col sostituire nella formola $f = \frac{\varphi\delta}{\delta - \varphi}$ un nuovo valore di δ diverso da 2φ; per esem: facendo $\delta = 2\varphi \pm n$; e ricavando in seguito per ciascun caso il valore di $\delta + f$, si troverà che 4φ è il minimo possibile.

201 Rimane in ultimo luogo ad osservare, che se la distanza dell'oggetto luminoso dalla lente qualunque è 10000 volte maggiore che il raggio di curvatura della lente isoscele equivalente (198) alla lente proposta, allora si potrà supporre che i

raggi provenienti dall'oggetto siano paralleli ai rispettivi raggi principali, e che per conseguenza si riuniranno nel foco principale della lente.

Infatti supposto che la luce passi dall'aria in una lente isoscele di vetro, il cui raggio di curvatura sia (198) $r' = 10$ pollici; si avrà $p=31$, $q=20$; quindi sostituendo nella formola $f = \frac{dqr''}{2d(p-q)-qr''}$, si troverà $f = \frac{1000.20.10}{20000.11-200} = \frac{2000000}{219800} = \frac{20000}{2198} = 9^{pol.},0991$; supposto $d=\infty$ si avrebbe (193 cor. 1°) $f = \frac{qr''}{2(p-q)} = \frac{200}{22} = 9^{pol.},0909$: la differenza dei due fochi non arriva a 0,0083 di un pollice, quantità assolutamente trascurabile. Avvertasi però, che se il raggio di curvatura r'' fosse di 5, 6, e molto più se di 10, o 20 piedi, allora la distanza $d = 10000$ dovrebbe essere duplicata, triplicata &c. onde poter esser autorizzati a considerar paralleli i raggi incidenti sebbene non vengano da distanza infinita.

Determinazione pratica del foco principale delle Lenti Convesse e concave.

202 Al metodo già indicato (200) per determi-

nare il foco principale delle lenti convesse, si può aggiungere il seguente. Si copra la superficie anteriore, o posteriore della lente con un dischetto di cartone, che abbia alcuni forellini: indi diretto l'asse della lente al sole si accosti a poco a poco un piano alla lente finchè i raggi che passano pei suddetti fori si veggano riuniti in un sol punto, il che si conoscerà agevolmente per mezzo della separazione dei piccoli spettri, che succederà quando il piano si trovi o troppo vicino alla lente, e da essa molto lontano: la qual separazione diventa sensibilmente minore a misura che il piano si accosta al foco principale della lente.

Per le lenti concave si prepari un dischetto BC (fig.ª 65) che abbia per diametro quello della apertura della lente concava BAC. Fatti nel disco alcuni fori, uno circolare R, gli altri E, G situati sullo stesso diametro, ed ugualmente distanti dal centro R, si rivolga l'asse I.F della lente al centro solare, e raccolti sopra un piano HK normale all'asse i fascetti luminosi emer-

Fig.ª 65

genti dalla lente, si trasporti il piano a tal distanza, dalla lente, che la distanza fra i centri H,K delle due sezioni de' suddetti fascetti distino il doppio che i centri E, G dei due forellini.

La distanza LR tra il piano raccoglitore, ed il piano forato sarà eguale alla distanza RF tra il piano forato, ed il foco virtuale F della lente: imperocchè nei due triangoli simili FHK, FEG si ha HK : EG :: FL : FR; ma per ipotesi HK è doppio di EG, dunque anche FL è doppio di FR: il punto R adunque cade nella metà di FL, e per conseguenza LR = RF. Si avverta che il piano forato BC deve essere situato sulla superficie della lente opposta a quella che si rivolge al sole, affinchè i punti F, H, G, K possano segnare la posizione divergente dei raggi emergenti dalla lente concava.

Se la lunghezza focale negativa vogliasi prendere dal punto A intersezione dell'asse colla superficie posteriore della lente, o si dovrà misurare la retta, o seno verso RA, e sottrarlo

da RF per avere AF, oppure addattare alla superficie BAC un cartoncino, e fare in esso due forellini e, g, vicinissimi all'asse, indi collocare il piano raccoglitore in tal posizione che si abbia hK dupla di eg, misurata come sopra la distanza lr: in questo caso il seno verso rA sarà così tenue, che senza error sensibile potrà considerarsi evanescente.

Della Visione per mezzo di una sola Lente.

203. Se l'oggetto AB (fig.a 63) è a tal distanza dalla lente convesso-convessa MN, che di esso formisi un immagine reale Ff, è chiaro, che se l'occhio trovasi tra la lente, e l'immagine non potrà vedere distintamente l'oggetto AB, poichè in tal posizione entrerebbero nell'occhio raggi rossi convergenti dalla lente verso i punti F.....f, mentre per indole della sua costruzione i raggi debbono entrarvi divergenti o paralleli per lo meno, affinchè la riunione di essi, ossia l'immagine degli oggetti esterni cada sulla retina.

Fig. 63

In questo caso però l'oggetto sebbene confuso apparirà non per altro più grande, che se fosse veduto ad occhio nudo. Imperocchè dipendendo la grandezza apparente dall'angolo ottico formato nel centro o della pupilla f.o.c collocato sull'asse, dagli assi ottici, è chiaro che il raggio principale BO non può essere asse ottico rispetto all'occhio, e che invece il raggio laterale BP dopo due refrazioni dirigendosi al centro O della pupilla diventa asse ottico; quindi l'occhio vedrà l'oggetto AB attraverso la lente sotto l'angolo bon, che è necessariamente > dell'angolo AoB sotto cui l'oggetto apparirebbe all'occhio nudo. Questa osservazione deve estendersi a tutti i casi seguenti colle opportune modificazioni. Vedremo fra poco come si determini il rapporto fra la grandezza apparente ad occhio nudo, e ad occhio armato.

Che se l'occhio trovasi a maggior distanza dalla lente che la distanza focale OF, per esem: in P, allora potrà vedere l'immagine Ff dall'og-

getto AB, come se fosse un vero oggetto; supposto sempre che la distanza FP dell'occhio dall'immagine sia per lo meno di 6. pollici. Imperocchè in tale ipotesi i raggi F......f dell'immagine sono come altrettanti punti luminosi che diffondono all'intorno almeno entro un dato spazio determinato dai raggi estremi dei coni lucidi, raggi luminosi, que' medesimi raggi cioè, che sono incrocicchiati nei punti di concorso F......f; quindi se i raggi divergenti, e componenti questi coni luminosi i cui vertici sono i punti F......f, possono entrare nell'occhio situato alla debita distanza, si dipingerà allora sulla retina un'immagine precisa dell'immagine Ff considerata come oggetto, ed in tal caso avrà luogo la visione distinta. Senza che io il dica ognun vede, che l'occhio vedrà l'immagine Ff in una posizione opposta a quella, in cui, tolta la lente vedrebbe l'oggetto luminoso AB. Che se l'occhio P trasportisi a maggior distanza dall'immagine Ff, vedrà questa sotto un an-

golo ottico sempre più piccolo, e per conseguenza la grandezza apparente di essa andrà continuamente scemando.

204. Se l'oggetto AB (fig.ª 64) esista nel foco principale della lente convessa MN, condotti allora i raggi principali AOH, BOG, è chiaro che tutti i raggi incidenti dai punti luminosi A, C, B... emergeranno parallelamente ai rispettivi raggi principali AH, BG, CF (199); quindi ossia che l'occhio posto sull'asse si trovi o alla distanza Oa, overò alla distanza maggiore Oa', l'angolo ottico, a motivo del parallelismo de' raggi emergenti sarà sempre lo stesso; quindi variando la distanza dell'occhio dalla lente, non varierà in questo caso la grandezza apparente dell'oggetto AB. Lo stesso dicasi di qualsiasi altra posizione dell'occhio anche fuori dell'asse principale CF, quale per esempio sarebbe c. Devesi però avvertire, che se l'occhio trovisi in tal posizione, come in e, d, che non possano penetrarvi in esso fuorchè i raggi lanciati dai punti compresi fra C, ed A, o frà

Fig.ª 64

C, e B, l'occhio non vedrà l'altra porzione dell'oggetto, i raggi della quale non possono penetrare in esso. Così l'occhio posto in d non vedrà che la porzione CB dell'oggetto, e posto in c non vedrà che l'altra porzione CA. Inoltre deesi osservare, che in questo caso l'occhio vedrà l'oggetto, e non l'immagine di esso; quindi lo riferirà alla sua natural posizione, restandone soltanto variata la grandezza apparente come fra poco vedremo.

Finalmente se l'oggetto AB sia più vicino alla lente di quello che sia la lunghezza del foco principale, allora i raggi emergeranno divergenti (194), quindi l'occhio continuerà a vedere l'oggetto BA nella sua posizione naturale, e non iscorgerà variazione che nella sua grandezza apparente. Ci è detto che i raggi emergono divergenti; ma conviene riflettere che la loro divergenza è minore di quella, che naturalmente avrebbero se non fosse la lente, la quale essendo convessa diminuisce in qualche parte la suddetta natural divergenza.

Fig.a 66

205. Similmente se dai punti A, B (fig.a 66) dell'oggetto luminoso AB si conducano pel centro ottico O della lente concava MN i raggi principali AOF, BOH, i raggi luminosi emergeranno dalla lente divergendo dai rispettivi raggi principali, e concorrendo negativamente nei punti a..... b dell'immagine virtuale ab. Ora se dietro la lente si collochi in una posizione qualunque l'occhio dell'osservatore, in esso entreranno i raggi di luce con maggior grado di divergenza di quello che se direttamente fossero venuti dall'oggetto luminoso AB; quindi se la divergenza aumentata dalla lente non ecceda quel grado che può essere superato dalla forza refrattiva convergente degli umori dell'occhio, si dipingerà sulla retina l'immagine dell'oggetto AB, come se esso esistesse nel luogo dell'immagine virtuale ab; la quale avendo la stessa posizione che l'oggetto, questo apparirà diritto.

206. Si potrebbe qui objettare, che i raggi lucidi emergendo dalla lente concava divergono come se venissero dai punti a, b (205) situati

sui raggi principali, che i corrispondenti punti dell'oggetto AB, e che per conseguenza l'occhio situato dietro la lente dovrebbe vedere sotto l'angolo dei raggi principali l'oggetto colla sua natural grandezza, e tutto al più trasportato a maggior vicinanza, nella posizione dell'immagine virtuale ab. Ma se riflettasi che l'angolo ottico misuratore la grandezza apparente degli oggetti è formato dai raggi, o assi ottici che passano pel centro c della pupilla dc, e che que' raggi che sono principali rispetto al centro di refrazione O, non sempre, nè tutti sono assi ottici, sparirà qualsiasi dubitazione intorno all'esattezza de' risultati della formola che io porrò in seguito nel (2.10) Infatti per la posizione dell'occhio espressa nella figura, il raggio principale bO rispetto al centro O di refrazione, diventa secondario rispetto all'occhio, poichè passa per l'estremità d della pupilla: per lo contrario il raggio bc che è secondario rispetto al centro O di refrazione diviene asse

ottico, perchè diretto al centro c della pupilla.

Ciò posto avendo i due triangoli aOb, acb la stessa base ba, e due lati coincidenti colla stessa retta an, è chiaro che essendo c più lontano da ab, che O, l'angolo ottico mcn=acb sarà minore dell'angolo aOb sotto il quale si dovrebbe vedere l'immagine, se vera fosse l'objezione proposta.

Modificazione della Grandezza apparente degli oggetti osservati con una sola Lente

207. Probl: Dato il foco de'raggi paralleli di una lente convessa, date le distanze dell'oggetto, e dell'occhio dalla lente, trovare il rapporto fra la grandezza apparente di un oggetto osservato con una lente, e la grandezza apparente dello stesso oggetto osservato ad occhio nudo.

Fig.a 63

Soluz. Rappresenti OCE (fig.a 63) l'asse della lente convesso-convessa GHL: sia O il luogo dell'occhio, F il foco de'raggi paralleli, C il centro ottico della lente; e suppongasi l'occhio O più distante dalla lente che il foco F, cosicchè abbiasi

CO > CF. Il semidiametro dell'oggetto normale all'asse, è rappresentato dalla retta EN, e la semiapertura della lente da CB.

Considerando la pupilla O come un punto luminoso, si cerchi il suo foco CQ che sarà positivo, giacchè CO > CF (194). Suppongo per maggior semplicità del calcolo, e della costruzione della figura, che le due rifrazioni che succedono nella lente riducansi ad una sola, e che facciasi in B punto del raggio dell'apertura CB situato al bordo della lente, di cui si trascura la grossezza.

Pel foco Q dell'occhio, e pel punto estremo B della lente si tiri la retta BQ prolungata in sino che incontri l'oggetto luminoso in un punto N. Questa retta NQB indica la direzione di quel raggio di luce, che emanando da N, e cadendo sull'estremità assunta, e stabilita della lente, e rifrangendosi si dirigerà sicuramente nella pupilla O (199), giacchè esso passa pel foco Q della stessa pupilla. Similmente tutti i raggi che partono da N vicinissimi, ossia pochissimo divergenti da HN,

dopo le rifrazioni non molto si scosteranno dal raggio BO, ed entreranno quindi nell'occhio passando pei diversi punti della pupilla, e formando sulla retina una pittura dell'oggetto, purchè i raggi luminosi abbiano una conveniente divergenza.

Ora si osservi che da tutti i punti della retta ĖN si possono condurre pel foco Q raggi luminosi che cadano sulla proposta lente, e che l'estremo di questi punti è N, poichè il raggio che da esso dirigesi verso Q, cade sulla prefissa estremità B della lente: quindi ancorchè l'oggetto proposto sia molto esteso, l'occhio collocato sull'asse in O, non ne potrà vedere che la sola porzione ĖN al dissotto dell'asse EO della lente, ed una porzione eguale EN' al dissopra di esso; quindi la intiera porzione dell'oggetto esteso che può rendersi visibile all'occhio situato in O è espressa da NN', ed è divisa per metà dall'asse della lente, cosicchè la porzione ĖN sarà il semidiametro apparente della parte visibile, cui l'occhio O se ben costrutto,

e collocato vedrà per mezzo della lente sotto l'angolo BOC, o se prolunghisi tanto NE quanto OB, sotto l'angolo POE $= m'$, mentre ad occhio nudo sarebbe apparso sotto l'angolo EON $= m$: quindi poichè le grandezze apparenti altro non sono che gli angoli ottici formati nel centro dell'occhio dagli assi dei coni lucidi provenienti dai punti estremi di un oggetto, ognun vede, che la grandezza apparente m' modificata dalla lente sta alla grandezza apparente ad occhio nudo come $m' : m$; ovvero preso OE per raggio, e sostituendo agli angoli qualche funzione trigonometrica, le suddette grandezze apparenti staranno tra di loro $:: \tan g\, m' : \tan g\, m$; e se gli angoli POE, EON siano piccoli, il rapporto delle tangenti si ridurrà senza error sensibile a quello di $m' : m$.

Ora a motivo delle parallele NP, CB i triangoli EQN, BQC; OPE, OBC sono simili, quindi si avrà $EN : BC :: EQ : QC$; $BC : PE :: OC : OE$; moltiplicando queste due analogie, e riducendo si avrà $EN : PE :: EQ . OC : QC . OE$. Ciò posto sia il foco prin-

cipale $CF = f$; $CO = \partial$; $EC = \partial'$: si avrà la distanza focale $CQ = \frac{\partial f}{\partial - f}$ (200); $EQ = EC - CQ = \partial' - \frac{\partial f}{\partial - f} = \frac{\partial\partial' - \partial' f - \partial f}{\partial - f}$, $EO = EC + CO = \partial' + \partial$; e poichè si ha tang m' : tang m :: $PE : EN$, ossia :: $QC \times OE : EQ \times OC$, sostituiti i valori analitici si avrà tang m' : tang m :: $\left(\frac{\partial f}{\partial - f}\right)(\partial' + \partial) : \left(\partial' - \frac{\partial f}{\partial - f}\right)\partial$ :: $f\partial^2 + \partial\partial' f : \partial'\partial^2 - \partial\partial' f - \partial^2 f$; quindi

$\frac{\text{tang}\, m'}{\text{tang}\, m} = \frac{f(\partial + \partial')}{\partial\partial' - \partial' f - \partial f} = \frac{f(\partial + \partial')}{\partial\partial' - f(\partial + \partial')}$. Or qui conviene osservare 1°. Che se $f(\partial + \partial')$ è $> \partial\partial' - f(\partial + \partial')$, ossia se $\partial\partial'$ è $< 2f(\partial + \partial')$ anche tang m' sarà $>$ tang m, e per conseguenza supposti acuti gli angoli m', m la grandezza apparente m' ad occhio armato sarà maggiore della grandezza apparente naturale m: 2°. Che appostatamente si è detto, che l'occhio deve essere convenientemente situato, onde possa vedere il semidiametro EN dell'oggetto. Imperocchè siccome in questo caso il punto N è più lontano dalla lente, che il foco Q dell'occhio, è chiaro, che il foco di N sarà più vicino alla lente che l'occhio O (199), il quale per conseguenza vedrà l'immagine dell'oggetto purchè sia da essa distante 6 pollici circa: quindi la distanza dell'oc-

chio dalla lente deve superare di 6 pollici la lunghezza focale f' relativa alla distanza ∂' dell'oggetto, ed espressa da $f' = \frac{\partial' f}{\partial' - f}$, ossia si deve avere $\partial = f' + 6^{pol.}$ Che se si avesse $f(\partial+\partial') < \partial\partial' - f(\partial+\partial')$, ossia $\partial\partial' > 2f(\partial+\partial')$ allora anche tang m' sarebbe $<$ tang m, ossia supposti accuti gli angoli $m' < m$ (203).

208. La precedente formola riguarda il caso in cui il foco Q dell'occhio sia più vicino alla lente che l'oggetto EN. Ma se l'oggetto ne normale all'asse sia più vicino alla lente che il foco Q, dell'occhio, cosicchè sia $eC < OC$, ossia $\partial' < \partial$, allora condotta pel foco Q all'estremità B della lente la retta BO, essa taglierà l'oggetto in un punto n, che sarà l'estremo di quelli che si possono vedere dall'occhio O, e la visione di esso verrà prodotta dal raggio lucido nB, e dai raggi laterali a lui vicinissimi, che dopo le rifrazioni nella lente entreranno divergenti nella pupilla O; quindi la grandezza apparente nella lente starà alla grandezza apparente ad

occhio nudo come la tangente dell'angolo BOC sta alla tangente dell'angolo nOe.

Ciò posto a motivo dei triangoli simili Oen, OCp, Qen, QCB si hanno le seguenti proporzioni $pC : en :: OC : Oe$; $en : BC :: Qe : QC$; fatto il prodotto di amendue $pC : BC :: OC \times Qe : Oe \times QC :: OC(CQ - eC) : QC(OC + Ce)$. Ora ritenute le denominazioni precedenti ed osservando, che preso OC per raggio le rette pC, BC sono tangenti degli angoli misuranti le due grandezze apparenti ad occhio nudo, e ad occhio armato; quindi fatta la sostituzione si ha $\tang m : \tang m' :: \delta\left(\frac{\delta f}{\delta - f} - \delta'\right) : \left((\delta+\delta') \times \frac{f\delta}{\delta - f}\right) :: (\delta+\delta')f - \delta\delta' : f(\delta+\delta')$, donde risulta $\frac{\tang m}{\tang m'} = \frac{f(\delta+\delta')}{f(\delta+\delta') - \delta\delta'}$; ma poichè $f(\delta+\delta')$ è $> f(\delta+\delta') - \delta\delta'$, anche $\tang m' > \tang m$; quindi supposti acuti gli angoli si avrà $m' > m$; in questo caso adunque la grandezza apparente ad occhio armato è sempre maggiore della grandezza apparente ad occhio nudo.

209. Supponiamo in terzo luogo, che l'occhio O (fig.ª 68) trovisi fra il foco principale F, e la lente HC, e che l'oggetto EN, ~~trovisi~~ in tal distan-

Fig.ª 68

za, che di esso possa formarsi l'immagine reale. In questo caso la lunghezza focale dell'occhio sarà negativa, ed espressa da CQ (194). Condotta allora dal foco negativo Q per l'estremità B della lente la retta BQ prolungata sino in N, questo punto esprimerà il punto estremo dell'oggetto, che dall'occhio in O possa esser veduto: imperocchè siccome BN esprime la direzione del raggio OB dopo le rifrazioni nella lente, e che deve per conseguenza concorrere nel foco negativo Q, così se riguardisi NB come raggio derivante da N, e diretto al foco negativo Q dell'occhio, esso penetrando nella lente, e rifrangendosi si dirigerà all'occhio O, quindi la grandezza apparente dell'oggetto NE ad occhio armato sarà espressa dall'angolo BOC = m, mentre la grandezza apparente naturale viene espressa da NOE, ossia POC = m. Presa adunque OC come raggio, si avrà BC = tang.m'; PC = tang.m. I triangoli simili OCP, OEN; QCB, QEN danno le seguenti proporzioni PC : NE : : OC : OE ;

NE : BC : : QE : QC .

Operando sopra di esse come ne' casi precedenti, e ritenendo le stesse denominazioni troveremo infine. $\frac{\text{tang.}\,m'}{\text{tang.}\,m} = \frac{f.(\partial+\partial')}{f(\partial+\partial')-\partial\partial'}$: sebbene questa formola sia identica a quella del (208), non perciò dobbiamo credere identico l'effetto rispetto alla visione distinta. Imperocchè nel primo caso i raggi entrano nell'occhio divergenti, e nel caso presente in cui formasi una reale immagine dell'oggetto, i raggi entrano convergenti nell'occhio essendo esso situato fra il foco principale, e la lente, e per conseguenza l'immagine nell'occhio si formerà sempre necessariamente avanti la retina; mentre nell'altro caso (208) cadrà sopra di essa, a meno che la divergenza de' raggi non sia eccessiva; caso che non deve temersi ove trattasi di lenti convesse (204)

210 Giova qui l'osservare, che in nessuno de' tre casi ora considerati il denominatore del rapporto $\frac{\text{tang}\,m'}{\text{tang}\,m}$ può esser negativo, ovvero $=0$, Imperocchè nel primo caso (207) si ha per ipotesi $EC > QC$, ossia $\partial' > \frac{\partial f}{\partial - f}$; quindi $\partial'\partial - \partial' f > \partial f$, ossia

$\delta\delta' > \delta'f + \delta f$, o $f(\delta' + \delta)$, e per conseguenza $\delta\delta' - f(\delta + \delta')$ sarà una quantità positiva. Nel secondo caso (208) si suppone eC < QC, ossia $\delta' < \frac{\delta f}{\delta - f}$; quindi anche $\delta\delta' - \delta' f < \delta f$; dunque a più forte ragione sarà $\delta\delta' < \delta f + \delta' f$, ossia $\delta\delta' < f(\delta + \delta')$; dunque $f(\delta + \delta') - \delta\delta'$ esprime una quantità positiva. Nel terzo caso (209) si ha per ipotesi FC > CO, ossia $f > \delta$; dunque anche $f\delta' > \delta\delta'$ qualunque sia il fattore δ' comune; ed a più forte ragione $f\delta' + f\delta > \delta\delta'$, ossia $f(\delta + \delta') > \delta\delta'$; quindi il polinomio $f(\delta + \delta') - \delta\delta'$ esprime neccessariamente una quantità positivo. Egli è inoltre manifesto che in quest'ultimo caso l'oggetto EN apparirà sempre aumentato qualunque sia la sua posizione: poichè nella formola $\frac{\tan m'}{\tan m} = \frac{f(\delta + \delta')}{f(\delta + \delta') - \delta\delta'}$ il numeratore supera il denominatore: ma tale aumento non è mai disgiunto da confusione d'immagine, come superiormente ho dimostrato (209).

211. *Probl.* Data una lente concava GH (fig. 69) e la distanza CO dall'occhio, e CE dell'oggetto dalla medesima, trovare il rapporto fra la gran-

Fig. 69

dezza apparente ad occhio armato, e la grandezza apparente ad occhio nudo.

Soluz. Supposto l'oggetto E.N normale all'asse della lente, e supposto che Q sia il foco virtuale dell'occhio O, si prenda nella lente un punto B, considerato come estremità della lente, al quale da O si tiri la retta OB esprimente un raggio di luce, che verra rifratto in modo, che emergendo prenderà una direzione BN, che prolungata in senso opposto concorrerà nel foco negativo Q. Reciprocamente adunque se NB rappresenti un raggio di luce proveniente da N, ed incidente sul vetro in B, dopo le refrazioni prenderà la direzione BO allontanandosi da BQ, e penetrerà nell'occhio O. Dunque supposto B il punto estremo della lente concava; si determinerà la porzione EN dell'oggetto esteso, la quale può esser visibile dall'occhio O, conducendo pel suo foco virtuale Q, e per l'estremo B una retta BQ, prolungata sino all'oggetto in N, cosicchè E.N sarà il semidiametro visibile dell'oggetto proposto, e l'an-

golo BOC, ossia POE $= m'$ esprimerà la grandezza apparente dell'oggetto osservato dall'occhio O per mezzo della proposta lente concava; mentrecchè la grandezza apparente ad occhio nudo è espressa dall'angolo NOE $= m$; quindi preso OE per raggio, le rette EP, EN saranno le tangenti de' sopradetti angoli.

Ora dai triangoli simili OCB, OEP; QCB, QEN si hanno le seguenti proporzioni $BC : PE :: CO : OE$; $NE : BC :: QE : QC$, donde si ha $NE : PE :: CO \times QE : OE \times CQ$; e se facciasi $CO = \delta$, $EC = \delta'$, si avrà il valore assoluto della lunghezza focale $CQ = \frac{f\delta}{\delta + f}$ (200); la retta $OE = \delta + \delta'$; $EQ = CE + CQ = \delta' + \frac{f\delta}{\delta + f}$; quindi sostituendo si avrà $\tan m' : \tan m :: (\delta + \delta') \frac{\delta f}{\delta + f} : \delta\left(\delta' + \frac{f\delta}{\delta + f}\right)$ donde risulta $\frac{\tan m'}{\tan m} = \frac{f(\delta + \delta')}{f(\delta + \delta') + \delta\delta'}$. E siccome il numeratore di questa frazione, è più piccolo che il denominatore; è chiaro che anche $\tan m' < \tan m$; quindi per mezzo della lente concava si vedrà l'oggetto più piccolo di quello che si vedrebbe ad occhio nudo. Inoltre questo oggetto apparirà nella sua natural posizione, come si è già dimostrato (189).

Se nella precedente formola facciasi $d=0$, ossia se pongasi l'occhio O nel centro C della lente, allora riducesi $\frac{\tan g\, m'}{\tan g\, m} = \frac{fd'}{fd'} = 1$; quindi $\tan g\, m' = \tan g\, m$, ossia $m'=m$, l'occhio adunque in tal posizione vedrà l'oggetto come se lo guardasse ad occhio nudo: il che è d'altronde manifesto, poichè posta la pupilla nel centro ottico C, i raggi principali della lente diventeranno assi ottici, per l'occhio, e però l'angolo ottico ad occhio armato sarà uguale all'angolo ottico ad occhio nudo.

A misura poi che cresce la distanza d dell'occhio dalla lente, cresce il rapporto de' sopradetti angoli, cosicchè $\tan g\, m$ diventa molto maggiore di $\tan g\, m'$, e poichè anche m diminuisce per l'allontanamento dell'occhio, è chiaro, che l'altro angolo m' diminuirà più rapidamente, cosicchè l'oggetto veduto attraverso una lente concava apparirà sempre più piccolo; quanto più l'occhio si scosterà dalla lente.

Intorno all'ingrandimento delle lenti piano-

piane veggasi Canovai (§ 363. pag. 285).

Osservazioni generali sopra l'occhio, e sopra i suoi diffetti.

212. Abbiamo altrove indicato quali siano le parti principali ond'è composto l'occhio: ora ci resta ad avvertire, che il complesso di tutte queste parti formano una lente, il cui effetto è somigliantissimo a quello di una lente convessa, dipingendo quelle, come lo attesta l'osservazione, immagini sulla retina; quali appena ottenersi potrebbero da lenti le meglio lavorate. Ma tutto ciò non bastava ancora a render questa macchinarietta tanto perfetta, quanto pur lo richiedevano i bisogni, ed i vantaggi degli animali per cui essa fu costruitta. Imperocchè opportunamente riflettono i celebri professori di Firenze (Elementi di Fisic: Matemat: pag: 284. § 361.) supposto che i raggi lucidi si fossero esattamente riuniti sulla retina quando l'oggetto ne era distante per: esem: di 8 pollici; cangiata in più

la distanza; non sarebbe stato possibile di riunirveli, e la visione distinta avrebbe avuto il limite indivisibile di un sol punto. Più mezzi adoperò il Creatore perchè si vedessero distintamente gli oggetti entro un più ampio confine: Formò nella maggior parte degli animali la sclerotica assai flessibile onde poter cangiare una mutazione di figura a tutto il globo dell'occhio, cosicchè potesse ora accorciarsi, ed ora allungarsi: attaccò l'umor cristallino a dei ligamenti che ora distrutti, ora allentati non solamente lo accorciassero, o lo rimovessero dalla pupilla ma ne rendessero anche, or più grande, ed or più piccola la convessità; infine concesse un azione al primo, e più ampio anello, o fibre circolare dell'area, il quale appartenendo egualmente alla cornea, la costringe a rialzarzi quando egli si contrae, e a comprimersi quando si rilascia. Ora è manifesto che tanto il moto della retina, e del cristallino, quanto il cangiamento di figura del cristallino, e della cornea, che seco traggon pur anche

quelli degli altri due umori acqueo, e vitreo, eseguiti quasi senza avvedersene dall'animale, renderanno in ragione delle diverse distanze si ben misurata la convergenza dai raggi lucidi, che il punto di riunione sarà sempre sul nervo ottico, e produrrà sempre la visione distinta dentro i limiti assegnati alla forza dell'occhio. Tale è l'esenziale artifizio della macchina lavorata da Dio; al che se si aggiunga il picciol numero, e la stabilità dei pezzi che v'impiegò, il vario, e facile movimento, che per mezzo di sei muscoli le concesse, ed i ripari delle palpebre, delle tempia, e delle ciglia con cui la munì d'ogni intorno, si converrà senza pena, che non hanno gli Ottici original più perfetto su cui dirigere i loro studj; e che intanto le loro invenzioni potranno meritar qualche stima, in quanto si accosteranno più da vicino all'eccellenza di questo esemplare.

213. Prima di esporre i diffetti più comuni dell'occhio, e d'indicarne i rimedj, giova osservare che

di due lenti convesse, quella a parità di distanza dall'oggetto luminoso, quella ha il foco più lungo i cui raggi di curvatura sono maggiori, o più lunghi. Infatti chiamati R, R' i raggi della prima lente, ed r, r' quelli dell'altra, e supposta la distanza ∂ uguale per amendue, come pure uguale il rapporto di refrazione media $p:q$; ed espressi per F, ed f i fuochi delle due lenti avremo (193) le due seguenti formole $F = \frac{RR'q\partial}{\partial(R+R')(p-q)-RR'q}$; $f = \frac{rr'q\partial}{\partial(r+r')(p-q)-rr'q}$ ora supponendo che amendue i raggi R, R' superino i raggi r, r' dell'altra lente, ridotte allora le due precedenti formole allo stesso denominatore, e fatto il confronto de' termini, si troverà che la prima supera la seconda, e che per conseguenza il foco F della lente che ha raggi più grandi di curvatura, o meno convessa è maggiore del foco f dell'altra lente più convessa.

214. Dalla precedente osservazione risulta 1.° Che se l'occhio è per sua natural struttura, o per sovrabbondanza di umori abbia il cristallino

no, o la cornea lucida, o amendue insieme troppo incurvati, o anche gli umori troppo densi, e dotta-ti di eccessiva forza refrattiva, ovvero anche perchè la retina sia troppo distante dal cristallino, il fo-co, o l'immagine degli oggetti esterni sarà più vicino al cristallino di quello che sia in un oc-chio in cui le circostanze di refrazione sieno un tantino maggiori: quindi se suppongasi uguali in amendue gli occhi la distanza della retina dalla pupilla, e che nel secondo l'immagine ca-da realmente sulla retina, è chiaro che nell'al-tro siccome più convesso l'immagine si dipinge-rà avanti la retina, ed essa taglierà i coni op-posti luminosi risultanti dall'incrocicchiamen-to dei raggi, risultando in tal modo i circolet-ti di diffusione, sovraposti in parte gli uni agli altri, come già si è detto delle lenti convesse (191): in tal caso adunque la visione sarà confusa.

Avverrà l'opposto qualora per diminuzione di umori la cornea lucida s'appiani di molto, o poco convesso sia il cristallino, o per amendue i

diffetti insieme il complesso dell'occhio venga ad equivalere quanto all'effetto ad una lente poco convessa. In tal caso la lunghezza focale di quest'occhio supererà quella dell'occhio ordinario; onde se la retina trovisi alla consueta distanza dalla pupilla, i raggi luminosi convergenti incontreranno la retina prima della loro riunione, e la visione sarà del pari confusa a motivo de' circoletti di diffusione (191).

Il primo vizio suol manifestarsi nella gioventù, e diconsi miopi gli occhi che vi sono soggetti; e poichè tal diffetto proviene da una eccessiva forza riunitiva, o di convergenza, onde i raggi poco divergenti, e molto più i paralleli sono riuniti troppo presto, è chiaro che tal diffetto non in altro modo può togliersi che coll'aumentare debitamente la divergenza de' raggi incidenti, o avvicinando di molto l'oggetto luminoso all'occhio, a distanza minore di 6. pollici, o facendo uso di lenti concave, che per loro indole accrescono la divergenza de' raggi lucidi, che le attraversano, e che da esse

emergono.

Il secondo vizio è comune all'età provetta, e l'occhio in tal caso si chiama presbita: esso proviene dal diffetto di forza refrattiva, per cui i raggi lucidi che entrano nell'occhio anche con mediocre grado di divergenza, non si riuniscono che al di là della retina. Donde si vede che l'unico rimedio a questo vizio si è quello di rendere i raggi lucidi meno divergenti, o coll'allontanare dall'occhio l'oggetto luminoso, o col far uso di lenti convesse, le quali diminuiscono sempre la divergenza di que' raggi luminosi che le attraversano (*)

(*) Nota. Converrebbe dir qualche cosa di un terzo diffetto che in alcuni si manifesta, ed è che non essendo miopi, hanno però ristrettissimo il confine della visione distinta, diffetto che probabilmente proviene, o da rigidità delle parti dell'occhio, per cui non possa prendere quel grado di curvatura, che si richiederebbe ad una

Costruzione grafica della formola $f = \frac{\partial e}{\partial - e}$ (200)

215 In questa operazione si trascura la grossezza della lente, e si prende per raggio principale quella retta, che irrefratta passa pel centro ottico della lente. Insensibile è l'errore che risulta da queste due supposizioni, le quali poi, come per compenso, rendono semplicissima la cercata costruzione.

Supposto adunque che il punto luminoso A (fig.a 70) situato sull'asse della lente convessa DC dista da essa più che la lunghezza CF del foco principale F, si tiri pel centro C la retta CD normale all'asse; e si assuma un punto D come per estremità della lente. Indi condotta per D, e pel foco principale F la indefinita DF, si tiri per A la retta AB normale all'asse, ed in-

Fig.a 70

---

data distanza, o dall'abitudine contratta dall'infanzia di non vedere che oggetti situati ad una data distanza.

contrante la DF nel punto B, dal quale si tiri al centro ottico C il raggio principale indefinito BCG. Dall'estremità D si tiri la retta indefinita DG parallela all'asse, e segante il raggio principale in G. Abbassata da questo punto la GL normale all'asse, il piede L esprimerà il foco dell'oggetto luminoso A.

Imperocchè essendo DG parallela all'asse FL, i due triangoli BFC, BDG saranno simili, e si avrà quindi CF : DA (= CL) :: BF : BD : Inoltre per le parallele DC, AB simili sono i triangoli verticali AFB, FCD, e però BF : DF :: AF : CF ; BF : BF + FD (= BD) :: AF : AF + FC (= AC) ; ma già si ebbe BF : BD :: CF : CL, dunque si avrà pure AF : AC :: FC : CL. Ora si osservi che AC = ∂, che essendo F il foco principale della lente, sarà la retta CF = φ ; quindi AF = AC − CF = $\partial - \varphi$. Sostituendo questi valori nell'ultima proporzione si avrà CL = $\frac{\partial\varphi}{\partial - \varphi}$. Quindi CL esprime la cercata distanza focale f corrispondente alla distanza CA = ∂ del punto luminoso A. Trovata questa distanza focale si conosce pur anche quella de'

punti luminosi poco lontani dall'asse, ed egualmente distanti da C che il punto A (189).

216. Da questa costruzione risulta 1°. Che se il punto luminoso sia a distanza infinita dal centro ottico C, anche il punto B sarà a distanza infinita, quindi le due rette BD, BG che venendo da un punto B infinitamente lontano, comprendono una piccola linea CD saranno sensibilmente parallele, quindi la retta DG siccome parallela all'asse sarà = CF, ossia DG = CL = CF = φ, come già si sapeva. 2°. Se il punto luminoso esiste nel foco F de' raggi paralleli, ivi pure cadrebbe il punto B; quindi la retta BCG coinciderebbe coll'asse AL della lente, e non potrebbe incontrare la parallela DG che in un punto G infinitamente lontano. 3°. Se fosse data la lunghezza focale CL corrispondente alla distanza CA dell'oggetto, si potrà determinare il foco principale F colla seguente costruzione. Condotte per A, e per L le rette indefinite GL, BA normali all'asse della lente, e tirata per l'estremità D la paral-

lela DG all'asse, e segante la GL in G, si tiri per G, e pel centro C la indefinita GC, che incontrerà la retta AB in un punto B, dal quale condotta all'estremità D la retta BD, essa taglierà l'asse nel punto F, che sarà il foco principale cercato. La ragione di tutto ciò è per se stessa evidente.

217. Se il punto luminoso A' esiste tra il foco principale F, e la lente CD, allora innalzata da A' la normale A'B' che incontri la retta FD condotta al solito dal foco principale all'estremità D della lente, si tiri pel centro C, e pel punto B la indefinita CB'G che incontrerà la retta DG' parallela all'asse in G, da cui abbassata la normale G'L', il suo piede L' segnerà il foco negativo del punto luminoso A'.

Imperocchè essendo simili i triangoli FA'B', FCD; G'B'D, FB'C si hanno le seguenti proporzioni FB' : BD :: FA' : A'C ; FB' : B'D :: FC : DG (= CL'); quindi si avrà anche FA' : A'C :: FC : CL' ; ora essendo CF = φ; A'C = ∂; FA' = FC − CA' = $\varphi - \partial$; fatta la sostituzione si troverà CL' $= \frac{\partial\varphi}{\varphi-\partial} = \frac{-\partial\varphi}{\partial-\varphi} = -f$,

espressione della cercata lunghezza focale negativa.

Per mezzo di analoghe costruzioni si può determinare il foco virtuale nelle lenti concave per qualsiasi distanza dell'oggetto. Veggasi Scheuffer Diop. pag. 27.

Teoria delle Macchine Diottriche.

218. Quelle macchine, che per mezzo di sole lenti rendono visibili, e distinti gli oggetti lontani, ed ingranditi, chiamansi Cannocchiali, o Telescopj Diottrici. Alcuni di questi sono destinati per le osservazioni de' corpi celesti, altri per gli oggetti terrestri. I primi appellansi Cannocchiali astronomici, gli altri Cannocchiali comuni.

Cannocchiale Astronomico

Ora poichè non cale agli Astronomi che gli oggetti celesti, che tutti sono di figura sensibilmente sferica, sia rappresentati diritti, o-

rovesciati, il più spesso queste macchine non racchiudono che due lenti, una delle quali di foco lungo, e rivolta all'oggetto da osservarsi, detta perciò lente _obiettiva_, o semplicemente _obiettivo_, l'altra di foco più corto, e che nell'uso dello stromento si accosta all'occhio appellasi _lente occulare_.

Onde poi si conosca in che consiste la costruzione di questo stromento, suppongo che MN, (fig.^a 71) rappresenti l'obiettivo convesso, I il suo centro ottico; GH il diametro dell'apertura parziale, giacche una porzione della lente resta coperta dal bordo della incassatura; AIC l'asse principale di questa lente, che deve coincidere coll'asse del cilindro, o tubo in cui sono rinchiuse le due lenti MN, DE. Condotti i raggi principali AI coincidenti coll'asse, e BI, ed i raggi laterali AS, AH, BG, BH paralleli ai rispettivi raggi principali; quelli dopo le rifrazioni convergeranno verso questi nei punti a, b, e dipingeranno l'immagine ab rovesciata dell'oggetto luminoso AB. Tutti questi raggi dopo essersi incroc-

Fig. 71

cicchiati in a, e b, formeranno degli altri coni luminosi obm, gap opposti al vertice cogli altri coni indicati.

Collocata entro il tubo un altra lente convessa DE di breve foco, e in modo, che il suo foco principale coincida coll'immagine principale a, e che il suo asse coincida con quello della lente obiettiva, è chiaro che i raggi ag, ap dopo le refrazioni emergeranno paralleli all'asse (195) Cv, e formeranno un fascetto lucido cilindrico qprst, e similmente i raggi che partono dal punto b dell'immagine, che è pocchissimo distante dal foco principale della lente oculare (   ) emergeranno paralleli al raggio principale bC sulle direzioni oi, nh, mg.

219. Risulta da ciò 1°. che se collochisi la pupilla dell'occhio nell'intersezione de' fascetti luminosi, per esem: in v, tutti que' raggi, che nelle diverse posizioni dell'occhio possono divenire assi ottici, ossia passare pel centro della pupilla, formeranno sempre angoli ottici uguali a quel-

lo, che nella figura è rappresentato per nvC. Inoltre è chiaro, che quest'angolo esprimerà la grandezza apparente sotto cui l'occhio vede per mezzo della lente DE non l'oggetto AB, ma la sua immagine ba: 2°. Che siccome riferiamo il luogo dell'oggetto sulla direzione dei raggi che entrano nell'occhio, vedendo noi in questo caso l'immagine ab che è rovesciata rispetto all'oggetto AB, supposto, che vn sia l'asse ottico vedremo il punto b dell'immagine, che noi giudichiamo essere il corrispondente punto B dell'oggetto sulla direzione vn, mentre il punto a immagine di A collocato sull'asse si riferirà ad un punto su questa linea; quindi vedremo l'immagine ab sotto l'angolo ottico $nvC = bCa$, poichè bC è il raggio principale del fascetto lucido nm, che in questo caso gli è parallelo. 3°. Inoltre siccome tutti, o una gran parte di que' raggi che cadono sull'apertura GH della lente, la quale supera di gran volte l'apertura della pupilla, sono riuniti dopo le refrazioni in altrettanti fascetti lucidi, o raggi paralleli, è chiaro, che nell'occhio por-

to in v entrerà molto maggior copia di luce coll'ajuto dello stromento, di quello che avvrebbe se immediatamente osservasse l'oggetto: quindi l'oggetto apparirà più chiaro. 4.° Quando l'oggetto è molto lontano, come si suppone sempre nella teoria de' cannocchiali, si suppone sempre che l'angolo ottico AvB sotto cui l'occhio semplice vedrebbe l'oggetto AB sia uguale all'angolo AIB = aIb formato nel centro ottico I della lente obiettiva MN dai raggi principali, che partono dai punti estremi A, B dell'oggetto. Tal supposizione che semplifica come fra poco vedremo, il calcolo, non produce error sensibile nell'estimazione dell'angolo: imperocchè essendo IA una distanza infinita, la retta Iv esprimente la lunghezza del tubo diventa evanescente, quindi il punto v si può considerare coincidente col punto I, e però uguali i due soprddetti angoli. E poichè l'angolo nvC = bCa è molto più grande dell'angolo bIa, è chiaro che noi vedremo l'immagine dell'oggetto molto più grande di quello, che si vedrebbe lo stesso oggetto ad occhio.

nudo. 5.° Finalmente è manifesto, che quando vedesi meglio per mezzo de' raggi divergenti, che poi paralleli, come sono i miopi, allora si deve accostare la lente oculare DE all'immagine ab, cosicchè la distanza ac sia minore della lunghezza focale principale. Imperocchè in tal posizione i raggi de' fascetti lucidi emergono dalla lente divergenti dai rispettivi raggi principali (194). Per lo contrario i presbiti, i quali veggono meglio per mezzo dei raggi convergenti, dovranno allontanare l'oculare DE dalla posizione conveniente ai raggi emergenti paralleli; e far sì che la distanza ac sia maggiore che la lunghezza focale principale, giacchè formandosi allora dalla lente DE una nuova immagine di ab, i raggi emergeranno necessariamente convergenti (194, e seg:).

220. Per determinare la forza amplificativa di questo Cannocchiale, ossia il rapporto tra le grandezze apparenti ad occhio armato, e ad occhio nudo, osservo, come si è indicato (219) che la grandezza apparente dell'oggetto AB osservato ad occhio nudo.

è espressa dall'angolo $AIB = aIb = m$, che la grandezza apparente della sua immagine, o ciò che è lo stesso, la grandezza apparente dell'oggetto AB osservato ad occhio armato è espressa dall'angolo $nvC = bCa = m'$: osservo inoltre, che supposto l'oggetto AB normale all'asse del Cannocchiale, il che sempre si verifica, almeno con grandissima approssimazione ogniqualvolta dirigiamo l'asse dello stromento agli oggetti che vogliamo osservare, l'immagine ab sarà pure prossimamente normale all'asse ( ) CIA; quindi i due triangoli Cab, Iab saranno rettangoli in a, ed avranno il lato comune ab; esprimendo ora per f la lunghezza focale principale Ia dell'obiettivo, e per f' il foco principale Ca dell'oculare, avremo le seguenti proporzioni

$Ia\,(f) : ab :: 1 : \text{tang}\ aIb\,(\text{tang}\,m)$; quindi $ab = f.\,\text{tang}\,m$.

$Ca\,(f') : ab :: 1 : \text{tang}\ bCa\,(\text{tang}\,m')$; ossia $ab = f'.\,\text{tang}\,m'$;

quindi $f\ \text{tang}\,m = f'\ \text{tang}\,m'$; donde risulta la seguente proporzione $\text{tang}\,m : \text{tang}\,m' :: f' : f$, ossia la tangente della grandezza apparente ad occhio nudo sta alla grandezza apparente ad occhio armato,

come la lunghezza focale principale dell'oculare sta alla lunghezza focale dell'obiettivo.

Che se la grandezza apparente AIB = m sia piccola, come il più delle volte suol essere; piccola in proporzione sarà eziandio la grandezza apparente dell'immagine = m'; quindi alla ragione delle tangenti si potrà sostituire senza error sensibile quella degli archi, o degli angoli ad essi corrispondenti, e si avrà $m : m' :: f' : f$; onde $m' = \frac{mf}{f'}$ (A).

Se l'oggetto luminoso AB si accosti all'obbiettivo MN, crescerà allora (   ) la lunghezza focale Ia, quindi per mezzo del tubo mobile in cui sta rinchiusa la lente oculare DE si dovrà rimuoverla dalla posizione primitiva, onde il suo foco principale coincida colla nuova immagine dell'oggetto AB. Donde si vede che quanto più l'oggetto si accosta all'obiettivo MN, altrettanto si devè allungare il tubo del cannocchiale. In tal caso poichè f cresce, e diventa F, è chiaro, che sostituendo sempre gli accennati due triangoli, si avrà $\tan m' : \tan m :: f' : F$; quindi il rapporto $\frac{\tan m'}{\tan m} = \frac{F}{f'}$ sarà $> \frac{f}{f'}$.

che val quanto dire, aumento della grandezza apparente sarà più grande, quanto a parità di cose l'oggetto sarà più vicino alla lente obiettiva.

221. Poichè nell'equazione (A)(220) non entra la distanza della lente oculare dall'occhio, l'immagine conserverà la stessa apparente grandezza ovunque esso si collochi. Infatti se si collochi la pupilla in v', o in v'', essa vedrà l'immagine sotto l'angolo $ov''p = nv'C = bCa$. Per altro la sua miglior posizione sarà quel punto v, ove s'intersecano tutti i cilindri di luce, che emergono dall'oculare DE, cosicchè nè troppo si avvicini, nè troppo si allontani dalla lente, poichè non diffondendo il punto b raggi di luce tutta all'intorno, ma solo entro lo spazio determinato dai raggi, o lati estremi bo, bm del cono lucido obm, in amendue le accennate posizioni l'occhio non riceverebbe alcuno de' raggi refratti provenienti da b, e per conseguenza non potrebbe in alcun modo vederlo; e per tal modo il campo del cannocchiale, o l'area entro la quale si dipingono le immagini degli oggetti diminuirebbe.

222. Esprimendo per il raggio dell'apertura circolare della pupilla, e per π il rapporto del diametro alla circonferenza, l'area della pupilla sarà espressa per $n^2\pi$. Ciò posto se si rifletta, che per l'occhio inerme tanta è la chiarezza c di un punto luminoso, quanta è la luce che può entrare nell'area $n^2\pi$ della pupilla, mentre per l'occhio armato tanta è la chiarezza c' dell'immagine dello stesso punto luminoso, è la luce che penetra nell'apertura, o nell'area dell'obiettivo, il quale se ha u per raggio, ha $u^2\pi$ per area; converrà concludere; che $c : c' :: n^2\pi : u^2\pi :: n^2 : u^2$, cioè la chiarezza dell'oggetto, e dell'immagine saranno tra loro, come i quadrati dei raggi dell'apertura della pupilla, e dell'obiettivo. Onde se con due telescopj astronomici, nel primo de' quali l'objettivo abbia il foco principale f, e l'oculare il foco f'; m sia la grandezza apparente ad occhio nudo, m' la grandezza apparente ad occhio armato; e nel secondo telescopio l'obiettivo abbia il foco principale φ, e l'oculare φ'; m sia la grandezza apparente dell'og-

getto osservato ad occhio nudo alla stessa distanza che nel primo caso, m'' la grandezza apparente ad occhio armato, si avranno le seguenti equazioni $\frac{m}{m'}=\frac{\varphi'}{\varphi}$; $\frac{m}{m''}=\frac{\Phi'}{\Phi}$; donde si ha $\frac{m}{m'}:\frac{m}{m''}::\frac{\varphi'}{\varphi}:\frac{\Phi'}{\Phi}$, ossia $m'':m::\frac{\varphi'}{\varphi}:\frac{\Phi'}{\Phi}$, proporzione che dà il rapporto degli ingrandimenti di uno stesso oggetto osservato con due cannocchiali astronomici, ed esprime per conseguenza il rapporto delle grandezze delle due immagini. Esprimendo ora per z il raggio dell'apertura del secondo obiettivo, sarà $z^2\pi$ l'area del medesimo; per c'' la chiarezza dell'immagine formata in questo secondo sistema, si avrà $c:c''::n^2:z^2$; quindi $c''=\frac{cz^2}{n^2}$, come dalla proporzione superiormente esposta $c:c'::n^2:u^2$, si ha $c'=\frac{cu^2}{n^2}$: dunque $c':c''::\frac{cu^2}{n^2}:\frac{cz^2}{n^2}::u^2:z^2$, cioè la chiarezza delle due immagini dello stesso punto luminoso osservato ad ugual distanza da due telescopj astronomici stanno tra loro come i quadrati dei raggi di apertura degli obiettivi. Ma quando le immagini sono estese, e simili, la loro chiarezza, o intensità di luce, è a cose pari in ragione inversa dei qua-

drati delle loro grandezze, o dimensioni lineari omologhe, qui espressa da $\frac{f'}{f}$, $\frac{\varphi'}{\varphi}$, dunque si avrà $c' : c'' :: \frac{\frac{u^2}{\varphi'^2}}{\varphi^2} : \frac{\frac{z^2}{f'^2}}{f^2} :: \frac{u^2\varphi^2}{\varphi'^2} : \frac{z^2 f^2}{f'^2} :: \frac{u^2 f'^2}{f^2} : \frac{z^2 \varphi'^2}{\varphi^2}$, cioè le chiarezze delle due immagini sono tra loro come il quadrato delle principali lunghezze focali degli oculari, moltiplicato pel quadrato dei raggi dell'apertura dell'objettivo diviso pel quadrato delle principali lunghezze focali dello stesso objettivo.

Osservazioni intorno al foco de' raggi convergenti, ed al Campo de' Cannocchiali

223. Collocata una lente sussidiaria D'E' (fig.ª 72) fra l'obiettivo MN, ed il foco ab, i raggi che emergono dall'obiettivo cadranno convergenti sulla lente D'E'. Intorno a questa direzione deesi osservare

Fig. 72

1.° Che quel solo raggio Aa, che partendo dal punto luminoso A situato sull'asse comune, coincida con esso, passa per tutti i centri ottici I, C del sistema lenticolare, e per conseguenza è un raggio principale comune a tutte le lenti. Ma rispetto ad un punto B situato fuori dell'as-

se il raggio BIb che è principale per l'objettivo MN, non può esserlo evidentemente per l'altra lente D'E', giacchè non passa pel suo centro ottico C.

2°. Che partendo dal punto luminoso B infiniti raggi Bq, Bq', Bq''.....laterali al raggio principale BIb, che tutti concorrerebbero dopo le refrazioni nell'objettivo nel foco b se non vi fosse la lente sussidiaria D'E', ve ne sarà senza dubbio uno, purchè l'estenzione dell'objettivo sia notabile, per esempio, Bq', che dopo essersi rifratto in q', si prenderà emergendo tal direzione da passare pel centro ottico C della lente D'E'; quindi questo raggio che era laterale, o secondario rispetto al raggio principale BI diventa principale per la lente D'E', e i suoi raggi laterali saranno st, s't....

.... tutti convergenti verso il punto b.

3°. Questi raggi laterali entrando convergenti sopra una lente D'E' che è convessa, e per conseguenza idonea a far convergere per fino i raggi divergenti, questi raggi dico dopo essersi in essa rifratti, emergeranno molto più convergenti che

prima, quindi si uniranno in un punto b' del raggio principale s' C b' più vicino alla lente D'E' che non il punto b, in cui sarebbero concorsi in virtù del solo objettivo MN.

4.º Qualunque sia l'angolo di convergenza de' raggi st, s''t'', mt, m''t''; il loro punto di concorso, ossia il loro foco b'a' sarà più vicino alla lente D'E' di quello che sia il foco de' raggi paralleli, la convergenza dei quali è zero; cosicchè chiamato q' la lunghezza focale principale della lente D'F', si avrà Ca', ossia Cb' $<$ q'.

5.º Che la posizione del concorso, e foco a', b' deve esser tale, che supposto b' un punto luminoso, e che se i raggi lucidi che lo hanno formato ritrocedessero sulle stesse direzioni incidendo sulle lenti in c, c', c'', dovrebbero emergerne divergenti su quelle stesse direzioni ts, t's', t''s'', che prima percorsero cadendo sulla lente; e per conseguenza queste direzioni emergenti concorrerebbero in senso opposto in b; e però questo supposto punto luminoso b' non avrebbe foco reale, giacchè i rag-

gi emergerebbero divergenti; quindi (194) il punto b' sarà più vicino alla lente D'E' che il suo foco principale: il che conferma quanto poco fa abbiam detto n.° 4.° In questa ipotesi adunque il punto b deve considerarsi come il foco negativo del punto b'. Considerato il punto b', ovvero a' come punto luminoso più vicino alla lente che il suo foco principale φ', i raggi laterali emergeranno, come si disse, divergenti, ed il loro concorso, o foco virtuale sarà in a: quindi esprimendo per f' la cercata distanza Ca', e per δ' la nota lunghezza Ca, che qui esprime la lunghezza focale virtuale relativa al supposto punto luminoso a', ed essendo convessa la lente D'E' si avrà $\delta' = \frac{\varphi' f'}{f' - \varphi'}$, quantità negativa; perchè nel nostro caso $f' < \varphi'$, onde $\frac{\varphi' f'}{f' - \varphi'} = -\delta'$, dalla quale si ricava $f' = \frac{\varphi' \delta'}{\varphi' + \delta'}$ (N).

Donde si vede che il calcolo della lunghezza focale $f' = Ca' = Cb'$ de' raggi convergenti in una lente convessa D'E' riducesi a considerare i punti focali $a \ldots\ldots b$ dell'objettivo MN come oggetti luminosi rispetto alla lente sussidiaria D'E',

o a determinare la lunghezza focale f' relativa alla distanza δ' presa negativamente di questi punti dalla lente suddetta, il cui foco principale è rappresentato per φ'.

Esprimendo per φ il foco principale Fa della lente MN più vicina all'oggetto, e per δ la distanza IC dei centri ottici delle due lenti, è chiaro, che ritenute le altre denominazioni si avrà $Ca = \delta' = Ia - IC = \varphi - \delta$, Sostituendo questo valore in (N) si avrà $f' = \frac{\varphi'(\varphi - \delta)}{\varphi + \varphi' - \delta}$ (P)

Esempio. Sia $\varphi = 0,^{met}758$, $\varphi' = 0,725$; $\delta = 100$ si troverà $f' = \frac{725(758 - 100)}{758 + 725 - 100} = 0,^{met}3449$.

Supposte le due lenti a perfetto contatto dei loro centri diottrici (il che fisicamente non si può ottenere) si avrà $\delta = 0$; e la formola (P) si ridurrà a $f' = \frac{\varphi\varphi'}{\varphi + \varphi'}$: sostituiti i precedenti valori si ha $f' = 0,^{met}3706$.

Dalla formola (P) si ricava $\delta = \frac{\varphi\varphi' + f'\varphi' - \varphi f'}{\varphi' - f'}$ $= \frac{\varphi(\varphi' - f') - f'\varphi'}{\varphi' - f'} = \varphi - \frac{f'\varphi'}{\varphi' - f'}$ (Q) donde si vede, che dati i fochi principali φ, φ' delle due lenti, e dato il foco f' de' raggi convergenti rispetto alla seconda

lente D'E' si può determinare la distanza dei loro centri diottrici: Supposto per esem: $\varphi = 0^m,758$; $\varphi' = 0^m,725$; $f' = 190$, si ha $d = 758 - \frac{190 \cdot 725}{725 - 190} = 758 - 257,5 = 500,5^{millimetri}$

Osser: Se si cangiasse posto alle due lenti, cosicchè una fosse collocata nel luogo occupato dall'altra, allora nelle due formole (P)(Q) si scriverà φ' in luogo di φ, e viceversa; con che verranno addattate le formole alla nuova posizione delle lenti.

La distanza $Ia' = m$ tra il centro diottrico della prima lente, ed il foco a' de raggi che cadono convergenti sulla seconda lente, è manifestamente uguale ad $IC + Ca' = d + f'$; e sostituito il valore di f' si avrà $Ia = m = d + \frac{\varphi'(\varphi - d)}{\varphi + \varphi' - d} = \frac{\varphi d + \varphi d - d^2 + \varphi\varphi' - \varphi' d}{\varphi + \varphi' - d} = \frac{\varphi\varphi' + \varphi d - d^2}{\varphi + \varphi' - d} = \frac{\varphi\varphi' + d(\varphi - d)}{\varphi + \varphi' - d}$ (R). Così posto come sopra $\varphi = 0,758$; $\varphi' = 0,725$; $d = 0,250$, si troverà $m = Ia' = 547^{millim.},9$. Dato φ, m, d. si troverà il foco principale della seconda lente $\varphi' = \frac{(m-d)(\varphi - d)}{\varphi - m}$; onde posto $\varphi = 758^{mil}$; $m = 522$; $d = 261$, si avrà $\varphi' = 549^{mil},65 = 550^{mil}$ prossimamente.

Dati i fochi principali φ, φ' delle due lenti, e data la distanza tra il centro diottrico della prima, ed il piano su cui deve dipingersi l'immagine a' b' si troverà la distanza d delle due lenti per mezzo della formola (R). Primamente si avrà $\varphi m + \varphi' m - dm = \varphi\varphi' + \varphi d - d^2$; trasportando, e risolvendo in fattori $d^2 - (\varphi + m)d = \varphi\varphi' - \varphi m - \varphi' m$ compiendo il quadrato $d^2 - (\varphi + m)d + \frac{(\varphi+m)^2}{4} = \frac{(\varphi+m)^2}{4} + \varphi\varphi' - \varphi m - \varphi' m = \frac{\varphi^2 + 2\varphi m + m^2 + 4\varphi\varphi' - 4\varphi m - 4\varphi' m}{4} = \frac{\varphi^2 - 2\varphi m + m^2 + 4\varphi'(\varphi - m)}{4} = \frac{(\varphi - m)^2 + 4\varphi'(\varphi - m)}{4} = \frac{(\varphi - m)(\varphi - m) + 4\varphi'(\varphi - m)}{4} = \frac{(\varphi - m)(\varphi - m + 4\varphi')}{4}$ estraendo la radice, e trasponendo si avrà $d = \frac{\varphi + m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varphi - m)(\varphi - m + 4\varphi')}$.

Posto $\varphi = 0,758$; $\varphi' = 0,725$; $m = 0,530$, si hanno pe' di i due seguenti approssimati valori $d = 1066,27$ millim., $d = 229,73$ millim. Quest'ultimo valore scioglie fisicamente la quistione, poichè collocate le due lenti convesse MN, D'E' alla distanza di 221,73 millim. l'immagine reale a' b' si dipingerà alla distanza di 530 mil. dalla lente MN, e cadrà quindi sul piano VT a tal distanza collocato.

L'altro valore di $d = 1066,25$ mil. indica un'al-

tra posizione delle date lenti, mediante la quale non il foco, o immagine reale, ma il concorso ideale de' raggi emergenti dalla seconda lente D'E' (fig.ª 73) cadrebbe sul piano VT collocato alla distanza di 330 millim. dalla prima lente MN.

Fig. 73

Infatti quando $d = IC = 1066^{mil}{,}25$, $\varphi = Ia = 758^{mil}$; $Cu = Cu'$; $\varphi' = 725^{mil}$; si ha $Ca = IC - Ia = d - \varphi = 1066^{mil}{,}25 - 758 = 308^{mil}{,}25$; quindi l'immagine reale ab si dipinge tra le due lenti, e dista dalla seconda lente D'E' meno che la sua focale lunghezza principale $Cu' = \varphi'$; quindi il raggio di luce at' vibrato dal punto a dell'immagine, ed attraversante la lente convessa D'E' emergerà con diminuita emergenza secondo la retta pq, che prolungata in direzione opposta incontrerà l'asse AC in quello stesso punto o' per cui passa il piano raccoglitore VT: onde il concorso ideale de' raggi emergenti da D'E' disterà come nell'altro caso 330 millim: dal piano VT di posizione data rispetto all'objettivo MN.

Infatti l'immagine ab che diventa oggetto lu-

minoso rispetto alla lente D'E essendo più vicina a questa che non il suo foco principale $Cu = Cu' = \varphi$, i raggi usciranno divergenti, un pò meno però che prima: il foco $Ca' = f'$ sarà negativo; ed espresso per d' la distanza AC, si avrà

Poichè le due immagini $a'b'$, ab sono comprese fra gli stessi assi principali $Ca'a$, $Cb'b$, e potendo esser considerate come sensibilmente rettilinee, e normali all'asse ACa, giacchè l'oggetto luminoso AB è sempre supposto normale a quella linea (190), si avranno i due triangoli simili $Ca'b'$; Cab, dai quali si ricava $Ca' : Ca :: a'b' : ab$; ma $Ca' < Ca$; dunque l'immagine $a'b'$ contratta dalla lente sussidiaria D'E' è minore dell'immagine ab, che sarebbe formata dall'objettivo MN.

225. Ben comprese le sovra indicate verità non sarà difficile l'intendere quanto ora siamo per dire intorno al campo de' cannocchiali astronomici. A qual fine devesi osservare.

1°. Che siccome l'ingrandimento di queste macchine corrisponde al rapporto de' fochi principali dell'oculare, e dell'objettivo (220) e per conseguenza se essi sono isosceli, o ridotti a questa figura (198) sensibilmente proporzionali ai raggi di curvatura; ognun vede, che supposto lo stesso objettivo, tanto maggiore sarà l'ingrandimento dell'oggetto, quanto più picciolo sarà il raggio di curvatura dell'oculare. Per lo che vuolsi conchiudere che non si avrà ingrandimento alcuno se l'objettivo, e l'oculare supposti isosceli abbiano lo stesso raggio di curvatura. Ciò deesi intendere per le distanze infinite, poichè se la distanza dell'oggetto è finita, può succedere l'ingrandimento, atteso che l'immagine dista dall'objettivo più che la distanza focale principale, e per conseguenza i due triangoli Iab, Cab non sono più uguali, nè per conseguenza l'angolo ottico artificiale bCa è più uguale a aIb.

2°. Che le superficie su cui cadono i fochi, e dipingonsi le immagini degli oggetti lumino-

si sono curve, e sensibilmente sferiche (190) e volgono alla lente propria il loro concavo: quindi nel sistema lenticolare astronomico, le due superficie sferiche focali principali hah', tat' (fig.ª 71) non si toccheranno a rigore che in un sol punto a, e sensibilmente nel picciol tratto ac: quindi tutti i punti dell'immagine ab compresi fra c, e l'estremità b saranno più distanti dal centro ottico C, dell'oculare, che il suo foco principale: per lo che i raggi che partono da uno di questi punti per esempio da b, dopo essersi rifratti nell'oculare, non più emergeranno paralleli, ma bensì convergenti (194); dunque un occhio non presbita, ma ben costrutto situato in v non potrà vedere distintamente il punto b dell'immagine.

Fig.ª 71

Che se per veder distintamente il punto b spingasi l'oculare verso l'immagine ab cosicchè il punto estremo b cade sulla sfera focale tat', allora i punti a.....c vicini all'asse saranno troppo avvicinati alla lente DE di mo-

do, che i raggi ne emergeranno divergenti; mentre i raggi che partono da b emergono paralleli: Ora se l'osservatore conferma il suo occhio onde veder distintamente per mezzo de' raggi paralleli, non avrà distinzione di visione rispetto ai raggi divergenti, che partono dai punti dell'immagine vicini all'asse, e reciprocamente; a meno che non vogliasi supporre rapidamente successiva la visione di tutti i punti dell'immagine, e successivi del pari la conveniente conformazione dell'occhio per i raggi paralleli, e pei divergenti; il che se non s'avvera, la visione non potrà esser distinta per alcuni punti, che non sia confusa per gli altri.

La sola porzione adunque ac dell'immagine ab, sarà senza dubbio veduta distintamente da un occhio bene conformato, divenendo perciò inutile il restante cb della suddetta immagine: quindi la porzione ac esprimerà il raggio del campo circolare, che utilmente si può concedere al cannocchiale.

226. Dal che si vede che la dimenzione lineare del campo corrisponde a quella porzione ac delle superficie, o curve focali hah', tat' che finicamente si confondono insieme: e poichè questa porzione tanto è più estesa, quanto le accennate curve sono meno convesse, ossia quanto maggiori sono i raggi di curvatura delle lenti, e per conseguenza quanto maggiori sono le loro lunghezze focali principali (   ), ognun vede che il campo di un cannocchiale astronomico diverrà più esteso, quanto più lungo sarà il foco principale dell'oculare, supposto invariato l'objettivo; ma questo vantaggio è inseparabile dalla diminuzione dell'ingrandimento. Che se prendasi un objettivo MN di lungo foco, onde più estesa sia la porzione ac di coincidenza, allora cresce bensì la dimensione dell'immagine ab (194), ma il numero dei varj fochi parziali coincidenti colla superficie focale tat', non crescerà a proporzione dell'aumento dell'immagine; poichè avendo esse-

il punto estremo e si allontana dall'asse, e torna ad essere almeno prossimamente il punto estremo del contatto fisico delle due superficie focali. In questo caso adunque avrà bensì un notabile ingrandimento d'immagine, ma non ingrandimento sensibile di campo.

227. Da tutto ciò risulta, che tanto maggiore sarà il campo di un cannocchiale astronomico, quanto più lungo sarà il foco principale dell'oculare, e più piccolo lo spazio areale occupato dall'immagine dipinta dall'oggettivo; ora poichè tal ristringimento d'immagine facilmente si ottiene per mezzo della lente sussidiaria D'E' (fig. 72)(224) è chiaro che di due telescopj astronomici aventi objettivi, ed oculari uguali; quello avrà un campo maggiore, che racchiuderà la lente sussidiaria D'E'. I cannocchiali costrutti in questa maniera diconsi esploratori, essendo essi principalmente adoperati per le osservazioni di oggetti estesi, e numerosi.

Fig.a 72

Cannocchiali Galileani o Batavici

228. Se la proprietà de' Cannocchiali astronomici di rovesciar gli oggetti non nuoce all'osservatore de' corpi celesti, essa diviene molesta in molti casi all'osservatore di oggetti terrestri, al quale il rovesciamento di posizione nelle parti osta talvolta a segno di non riconoscerli. In due modi specialmente possono raddrizzarsi le immagini, e da ciascuno di essi è nato un nuovo sistema di lenti. Il primo trovato per accidente da un giovine Ollandese; indi perfezionato, e adoperato con meraviglioso successo da Galileo, e comprende una lente objettiva convessa MN (fig.ª 74), il cui asse AIC coincide con quello del tubo, e la cui lunghezza focale è espressa per Ia. Un tubo mobile entro il primo tubo rinchiude un occulare concava DE, il cui asse Ca coincide con quello del tubo, e per conseguenza con quello dell'objettivo. La posizione di questa lente rispetto all'obiettivo deve essere tale, che essa sia tra l'obiettivo, e il suo foco reale a, e che il foco prin-

Fig.ª 74

cipale virtuale dell'oculare coincida in a con quello dell'obiettivo.

Ciò posto se dai punti dell'oggetto luminoso infinitamente lontano AB si tirino pel centro ottico I dell'objettivo i raggi principali AIa; BIb..., ed i rispettivi raggi laterali Ad', Ad'' Bg, Bg', Bg'', questi dopo le due refrazioni anderebbero se fosse tolta l'oculare concavo DE, a riunirsi nei rispettivi fochi principali a, b; Ma poichè prima della riunione effettiva devono passare per la lente concava DE, è chiaro, che per l'indole di questa lente essi non potranno più emergere con quel grado di convergenza che avevano incidenti, ma con un grado notabilmente minore.

Per conoscere poi quale sia per essere la direzione de' suddetti raggi laterali dopo l'emersione dall'oculare concavo-concava, osservo, che la direzione de' fascetti emergenti deve essere quella stessa, che tornando essi indietro dovrebbero avere per emergere dalla lente concava con tal divergenza, che il loro concorso, o foco virtuale cadesse precisamente nei rin-

spettivi punti a, b del foco principale dell'oculare. Ma siccome per ottener ciò richiederebbesi chi i raggi incidenti bC, b'c', b''c''......q'n', an', q''n''......fossero paralleli ai rispettivi raggi principali bC, aC (195), perciò i raggi p'a, pa, p''a......sb, s'b, s''b convergenti nei punti a, b del foco principale negativo ab dell'oculare concava DE, emergeranno da esso in direzioni parallele ai rispettivi raggi principali Cb, Ca.

229. Ciò posto supponiamo che un occhio perfetto vut sia collocato vicinissimo alla lente concava DE, cosicchè il centro della pupilla esista nel punto v dell'asse. In tal posizione passeranno pel centro v della pupilla il raggio luminoso Av derivante dal punto A situato sull'asse, ed il raggio c'v proveniente dal punto B dell'oggetto situato fuori dell'asse; questi due raggi adunque saranno gli assi ottici sulla direzione de' quali si riferiranno i punti estremi A, B dell'oggetto luminoso; e l'angolo Avx = m' da essi formato nel centro v esprimerà la grandezza apparente

dell'oggetto osservato per mezzo del Cannocchiale. Ora a motivo delle parallele Cb, zvb', l'angolo ottico Cvz è $=$ ang: $b'va =$ ang: aCb; inoltre l'angolo $aIb = AIB = m$ esprime con grandissima approssimazione (219) l'angolo ottico naturale, ossia la grandezza apparente dell'oggetto osservato dall'occhio inerme nella posizione v. Ciò posto suppongasi l'oggetto AB ad infinita distanza, e facciasi Ca lunghezza focale principale dell'oculare $= f'$; Ia lunghezza focale principale dell'obiettivo $= f$; i due triangoli rettangoli Cab, Iab danno le seguenti proporzioni $Ca(f')$: ab :: 1 : tang aCb (tang m'); quindi $ab = f'$ tang m'; $Ia(f)$: ab :: 1 : tang aIb (tang m); quindi $ab = f$ tang m; dunque f' tang $m' = f$ tang m, tang m : tang m' :: f' : f, e se gli angoli m, m' sono piccoli come suol sempre accadere, si avrà $m : m' :: f' : f$; dunque in questo cannocchiale come nell'astronomico la grandezza apparente dell'oggetto ad occhio nudo sta a quella ad occhio armato come la principal lunghezza focale dell'oculare a quella dell'og-

gettivo.

230. Siccome l'occhio noi vede il punto B dell'oggetto sulla direzione dell'asse ottico vc'z il quale giace rispetto all'asse ACa dalla stessa parte che il punto luminoso B, ognun vede; che con questo cannocchiale qualunque sia la posizione dell'occhio, esso vedrà sempre diritto l'oggetto AB. Non conviene credere però, che tutte le posizioni sieno indifferenti per la maggior o minor estenzione del campo. Imperocchè i cilindri lucidi uscendo divergenti dalla lente DE sulle direzioni de'rispettivi raggi principali Cb, Ca è chiaro, che se la pupilla allontanandosi dall'oculare sulla direzione dell'asse si collocasse in o, non riceverebbe che i raggi i quali provengono dal punto A situato sull'asse, e tutto al più alcuni altri raggi emananti dai punti dell'oggetto AB vicinissimi all'asse del Telescopio, e nessuno uno di quelli che provengono dall'estremità B dell'oggetto, o dai punti ad esso vicini.

Che se la pupilla prenda la posizione u

fuori dell'asse, allora potrà vedere il punto B dell'oggetto, e quelli ad esso vicini, ma non vedrà più il punto A posto sull'asse. In amendue i casi adunque vuolsi conchiudere; che se l'occhio dell'osservatore è lontano dall'oculare concavo, e molto più se è lontano e posto fuori dell'asse, il campo sarà piccolissimo.

Aggiungasi a tutto ciò, che l'ampiezza del campo è sempre piccola anche posto l'occhio nella miglior posizione possibile, vale a dire in v, a meno che non si attribuisca all'obiettivo MN un'apertura grandissima. Imperocchè se l'objettivo abbia mediocre apertura, e se l'oggetto B' trovasi a notabile distanza dall'asse, allora condotto il raggio principale B'Ib', i raggi luminosi che da B' cadono sui punti q, q, q' vicini all'estremità, o bordo della lente diriggendosi dopo le refrazioni nell'objettivo verso il loro foco b', attraverseranno bensì il concavo DE, ma niuno di essi passerà pel centro di refrazione c, giacendo tutti fra c, e il bordo D: quindi in tal caso non solo mancherà il raggio

principale, ma ciò che più importa quell'altro raggio che passando pel centro della pupilla diverebbe asse ottico, e mancheranno altresì per l'occhio situato in rvt tutti i raggi provenienti da B', il quale per conseguenza non sarà visibile all'occhio. In questo sistema adunque la pupilla tutto che situata nella miglior posizione, che è quella sull'asse, e vicino all'oculare concavo, pure attesa la divergenza de' cilindri lucidi emergenti dall'oculare concavo, non potrà ricevere che una quantità sempre piccola di quei cilindri, e per conseguenza l'occhio non potrà vedere che quella piccola porzione AB degli oggetti luminosi che è situata in vicinanza dell'asse: donde si vede che questo Cannocchiale ha per indole sua un campo necessariamente ristretto. Questo diffetto, sono parole de' Professori Fiorentini, ha ributtato gli Astronomi dal farne uso; e quel Cannocchiale con cui Galileo fece nel cielo scoperte sì sorprendenti non si usa oramai che nei Teatri, ove basta una piccola lunghezza focale per avere in un giusto campo un sufficiente ingrandimento.

Cannocchiali Comuni o Terrestri

Fig.a 75

231. L'altro sistema di lenti atto a raddrizzare le immagini degli oggetti fu immaginato secondo alcuni dal P. Reita Cappucino; attribuendo altri il vanto di tal invenzione al P.   Gesuita. Esso consta di un oggettivo convesso MN (fig.a 75) e di tre oculari convesse DE, KL, OP. Gli assi di queste quattro lenti coincidono con quello del tubo principale entro cui sono racchiuse. La prima oculare DE è collocata come ne' cannocchiali astronomici (218), in modo cioè, che il suo foco principale coincida col foco principale ab dell'oggettivo. Per tal disposizione i raggi che dai punti a.....b dell'immagine ab cadono divergenti sulla prima oculare emergeranno da essa paralleli formando i cilindri luminosi rqps; oigm, il primo appartenente al punto dell'immagine posto sull'asse; l'altro al punto estremo b del contatto fisico delle due curve focali delle due lenti (223). Se si collocasse l'occhio in t ove l'asse di

questo cilindro taglia l'asse del tubo, si avrebbero manifestamente gli stessi risultati, e le medesime apparenze che nel Telescopio Astronomico (218 e seg.)

Ma se invece si collochi a distanza arbitraria la seconda oculare KL in modo che il fascetto estremo emergente dalla prima oculare DF possa cadere sulla seconda, il che quasi sempre si ottiene quando facciasi cadere il foco principale di KL sull'accennato punto d'intersezione t, i raggi di ciascun cilindro progredendo nelle rispettive direzioni, entreranno paralleli nella lente KL come se venissero da punti infinitamente lontani: Condotto pel centro ottico e il raggio principale infinito eb' parallelo ai raggi dell'estremo cilindro lucido o'igm'; è chiaro ( ) che questi raggi dopo le rifrazioni nella suddetta lente convergeranno in un punto b' del raggio principale; che sarà uno di quelli del foco principale della lente KL. Lo stesso dicasi del cilindro lucido medio p'srq', i cui raggi si uniranno nel punto a' del foco principale di questa lente. Egli è dunque manifesto, che in tal maniera si dipingerà una nuova im-

magine a'b' dell'oggetto AB, o piuttosto un immagine della prima immagine ab considerata come oggetto; e che questa seconda immagine a'b' siccome rovesciata rispetto alla prima ab, sarà evidentemente nella stessa posizione che l'oggetto AB, relativamente all'asse del cannocchiale.

Collocando ora la terza, ed ultima oculare OP in modo, che il suo foco principale, o per meglio dire la sua curva focale principale coincida per quanto si può coll'immagine a'b', allora tutti i raggi luminosi che partono divergenti dai diversi punti dell'immagine a'b' entrando nella lente OP ne emergeranno paralleli ai rispettivi raggi principali b'c, a'c, e si interseccheranno in u; ove se si collochi l'occhio dell'osservatore, l'immagine a'b' apparirà sotto l'angolo ottico tuc = b'ca', che esprimerà la grandezza apparente dell'immagine a'b'; o quella dell'oggetto AB osservato per mezzo del Cannocchiale.

232. Per determinare l'ingrandimento prodotto da questo sistema di lenti osservo (219) che trattandosi di telescopj, e per conseguenza di oggetti lumi-

nosi AB molto distanti, l'angolo ottico, o grandezza apparente naturale sotto cui apparirebbe l'oggetto AB all'occhio posto in u, non differisce sensibilmente dall'angolo BIA = bIa = m formato nel cento ottico dell'obiettivo dai raggi principali condotti dai punti estremi A, B dell'oggetto proposito. 2°. Che emergendo i raggi oi, n'h...... paralleli al raggio principale bC nella prima oculare; e dovendo essere il raggio principale eb' nella seconda oculare KL, uno dei raggi paralleli incidenti sulla lente suddetta, è chiaro, che eb' siccome parallelo ad oi, lo sarà eziandio a bC; e poichè le immagini ab, a'b' sono sensibilmente normali all'asse comune Iau, e perciò i due triangoli rettangoli Cab, ea'b saranno simili; quindi l'angolo aCb = a'eb'.

Supponiamo ora che sia

il foco principale dell'objettivo $Ia = f$
Il foco principale del 1°. oculare $Ca = f'$
Il foco principale del 2°. oculare $Ea = f''$
Il foco principale del 3°. oculare $ca' = f'''$
l'angolo ottico naturale aIb - - - $= m$

l'angolo $aCb = A'eb' = m'$

l'angolo ottico ad occhio armato $tuc = b'ca' = m''$.

Ciò posto nei due triangoli rettangoli Iab, Cab (220) si hanno le seguenti proporzioni $Ia(f):ab::1:\tan aIb$, ossia $ab = f.\tan m$; $Ca(f'):ab::1:\tan aCb$, ossia $ab = f'\tan m'$; quindi $f'\tan m' = f\tan m$, $\tan m' = \frac{f.\tan m}{f'}$.

Similmente nei due triangoli rettangoli $ca'b'$, e $a'b'$ si ha $ea'(f''):a'b'::1:\tan a'eb'(=\tan m')$; quindi $a'b' = f''\tan m' = \frac{f''f\tan m}{f'}$; $ca'(f'''):a'b'::1:\tan b'ca'$ $(=\tan m'')$; quindi $a'b' = f'''\tan m''$: paragonando i due valori di $a'b'$ si troverà $\frac{\tan m''}{\tan m} = \frac{ff''}{f'f'''}$; e se gli angoli siano piccoli $\frac{m''}{m} = \frac{ff''}{f'f'''}$ (A): donde si vede, che in questo Cannocchiale la grandezza apparente dell'immagine stà alla grandezza apparente dell'oggetto come il prodotto de' fochi principali dell'oggettivo, e della seconda oculare stà al prodotto de' fochi principali delle altre oculari.

Se le tre lenti oculari DE, KL, OP, hanno lo stesso foco principale, cosicchè sia $f' = f'' = f'''$ la precedente formola (A) riducesi ad $\frac{m''}{m} = \frac{f}{f'}$, come nel Cannocchiale Astronomico.

233. Infinite sono le modificazioni che possono attri-

buirsi ad un sistema di molte lenti, che per brevità io non posso accennare, ed intorno alle quali possono consultare le lezioni di Fisica Matematica di Canovai § 384; Scheuffer Diopt. § 88, ed il primo volume della grand'opera di Smith Traité complet d'Optique.

Le due seguenti tavole presentano alcune combinazioni di lenti pei telescopj astronomici, e terrestri, le quali per esperienza sono state conosciute le più esatte.

Pel Telescopio Terrestre a 4 Lenti

Foco principa: dell'obiettivo	Diam: dell'aper: dell'obiettivo	foco princi: de' 3 oculari	Diam: del Diafram: nel foco prin:	Ingrand: lineare approssim.
1. piedi par	4, linee 3	16, linee	4, linee	9, volta
2.	4, 6	22,	5, 5.	13,
3.	9,	26,	7, 5.	17,
4.	11,	28,	9,	21,
5.	12,	30,	10,	24,
6.	13,	31,	10, 5.	28,
7.	14,	34,	11,	30,
8.	15,	36,	11, 5.	32,

Pel Telescopio Astronomico

Foco principale dell'objettivo	Diam: dell'aper: dell'obiettivo	Foco princi: dell'oculare	Ingrandim: lineare appros:	
1. piedi par.	0, pol. 6, 5. linee	0, pol. 8. linee	20. volte	
2.	0, 9.	0, 10.	28.	
3.	0, 11, 5.	1, 0, 5.	34.	
4.	1, 1.	1, 2, 5.	40.	
5.	1, 2, 5.	1, 4.	44.	
6.	1, 4.	1, 6.	49.	
7.	1, 5, 5.	1, 7, 5.	53.	
8.	1, 6, 5.	1, 8, 5.	56.	
9.	1, 8.	1, 9, 5.	60.	
10.	1, 9.	1, 11.	63.	
11.	1, 10.	2, 0.	66.	
12.	1, 11.	2, 2.	69.	
14.	2, 0, 5.	2, 3.	75.	
16.	2, 2.	2, 5.	79.	
18.	2, 4.	2, 7.	85.	
20.	2, 5, 5.	2, 8, 5.	89.	
25.	2, 8.	3, 0.	100.	
30.	3, 0.	3, 3, 5.	118.	

35.	3, 3.	3, 7.	118.	
40.	3, 6.	3, 10.	126.	
45.	3, 8.	4, 0, 5.	133.	
50.	3, 10.	4, 3.	141.	

Microscopj Diottrici

235. Dopo aver parlato diffusamente di questi strumenti, che all'occhio presentano chiari, e distinti gli oggetti lontanissimi, ragion vuole, che qualche cosa pur si dica di questi altri, non meno maravigliosi, stromenti, che destinati sono a render visibile all'occhio quel numero infinito di minimi oggetti, che per la loro estrema piccolezza sebbene avvicinati il più possibile all'occhio il più perfetto, non valgono a dipingervi in esso alcuna sensibile immagine di se medesimi.

I Microscopj Diottrici altri sono semplici: e non contengono che una sol lente: altri composti, e ne contengono almeno due. Dell'una e dell'altra specie di microscopj dirò partitamente, e bre-

vemente quanto occorre di più necessario, e di più utile a sapersi.

Microscopj Semplici

235. Due sono i principali ostacoli che si oppongono alla visione distinta degli oggetti minimi, e per loro natura poco illuminati: 1°. la piccolezza della loro estenzione, per cui posti alla solita distanza di 6. poll: dall'occhio perfetto dipingesi un'immagine di essi tanto piccola, che quasi si riduce a un sol punto fisico, nel quale per conseguenza non si possono distinguere distintamente tutte le parti omologhe dell'oggetto. 2°. Il languor di luce, che i suddetti corpiccuoli emettono, per cui l'immagine dipinta sulla retina già per se stessa piccolissima, diventa altresì pallida, e languente. Il concorso di queste due cause ci rende impossibile la visione distinta dei sovraccennati corpi.

A togliere simultaneamente questi due ostacoli potrebbesi da taluno credere, che potesse bastare l'avvicinamento dell'oggetto all'occhio, poichè allora e si aumenterebbe l'angolo ottico, e per con-

:eguenza l'estenzione dell'immagine sulla retina, e
nella pupilla siccome più vicina all'oggetto luminoso
entrerebbe maggior copia di luce, onde render più
vivida la suddetta immagine. Ma se si rifletta che
la natura ha prescritto un limite di massimo ac-
costamento, limite che per lo meno è di 6. pollici,
e oltrepassato il quale troppo grande sarebbe la di-
vergenza de' raggi incidenti sull'area della pupilla,
cosicchè non si dipingerebbe immagine alcuna
nell'occhio, o essa cadrebbe al di là della retina, si
vedrà chiaramente esser tal ripiego malacconcio
all'uopo, e che inutile sarebbero per essere tutti i
tentativi pel conseguimento della visione distin-
ta degli oggetti minimi, e poco luminosi, se non
si fosse trovato il modo di avvicinare moltissimo
l'oggetto all'occhio, e diminuire nello stesso tempo
l'eccessiva divergenza de' raggi luminosi, riducen-
dola a tal grado da poter esser vinta dalla forza
refrattiva, o convergente degli umori dell'occhio,
cosicchè l'immagine dell'oggetto benchè minimo,
e vicinissimo all'occhio potesse cader precisamen-

te sulla retina.

236. Le lenti convesse di breve foco servono mirabilmente a tal uopo, e costituiscono senza altro apparato un vero microscopio semplice. A dimostrar ciò basterebbe richiamar quanto si è detto intorno alla visione per mezzo delle lenti (203), ed alla grandezza apparente degli oggetti (207 e seg.); ma per render ancor più manifesta la dimostrazione, ed applicare i principj generali ai fenomeni particolari, che si osservano nelle lenti microscopiche, non credo inutile l'aggiungere alle sovraccennate teorie generali qualche considerazione.

Fig.ª 76

Rappresenti adunque AB (fig.ª 76) una lente convessa il cui foco principale GF non sia che di poche linee; gFg' rappresenti la curva focale principale, ed FH un oggetto luminoso situato nel foco principale. Se tutti i punti dell'indicato oggetto ancorchè esteso coincidessero almeno fisicamente coi punti della curva focale, è chiaro che tutti i raggi luminosi che dai punti dell'oggetto cadono sulla lente emergerebbero da essa paralleli ai rispettivi

raggi principali (   ); ma poichè la suddetta curva focale ha un raggio brevissimo di curvatura; e per conseguenza è moltissimo convessa, perciò la supposta coincidenza fisica, ed il parallelismo dei raggi emergenti non può aver luogo che per gli oggetti di piccolissima estenzione, siccome coincidenti coll'accennata curva focale; e questi saranno i soli, che in tutta la loro estenzione potranno esser veduti distintamente (224) dall'occhio m n o situato dietro la lente a piccola distanza da essa (202). l'angolo ottico sotto cui l'occhio vedrà l'oggetto sarà p n C; ed essendo l'asse ottico p n parallelo al raggio principale HC, è chiaro che l'angolo ottico p n C è = HCF. Condotta ora dal punto H al centro n della pupilla la retta H n, essa formerà coll'asse ottico C n l'angolo ottico naturale, o grandezza apparente H n C; e poichè il punto C è più vicino all'oggetto FH, che il centro n della pupilla, è chiaro, che l'angolo ottico naturale H n F sarà < HCF, e per conseguenza < p n C. Quindi per mezzo della lente AB l'oggetto FH apparirà sotto un angolo mag-

giore di quello sotto cui apparirebbe ad occhio nudo.

Inoltre siccome noi siamo avvezzi a collocare alla distanza di 6. poll: quegli oggetti, massime se sono piccoli, che noi vogliamo vedere distintamente ad occhio nudo, la lunga abitudine che in ciò si contrae fa sì, che si congiungono insieme le idee della visione distinta di un oggetto, con quella di una data distanza dall'occhio, cosicchè posta l'una, l'altra immediatamente in noi si risvegli, chiara cosa è, che vedendo noi con distinzione l'oggetto piccolissimo FH per mezzo della lente AB, non solo giudichiamo che esso disti di 6. pollici dal nostro occhio; ma che a tal distanza si estenda secondo F'H' dall'asse ottico F'n sino all'altr'asse npH determinato dal raggio emergente pn che entra nel centro n della pupilla, e non già nell'altro asse ottico ideale Hn, che irrefratto stendesi da H al centro n, come falsamente asserisce la maggior parte degli autori, nella sentenza de' quali la grandezza apparente attribuita dell'oggetto FH, sarebbe F'h', e non già F'H' restando escluso questo au-

mento, che si appartiene al reale ingrandimento dell'angolo ottico.

Da tutto ciò si vede, che l'aumento degli oggetti piccoli osservati con una lente di brevissimo foco, dipende simultaneamente da due cagioni 1°. da un reale aumento dell'angolo ottico prodotto dalla lente convessa: 2°. da un giudizio, o da una consociazione di due idee, una delle quali concerne la distinzione della visione, l'altra la distanza in cui suol comunemente accadere.

Quindi è che a parità di cose giudicherà più ingrandito l'oggetto colui, che o per esser presbita, o per altra qualsiasi cagione suol tenere gli oggetti più lontani dall'occhio per la visione distinta di una distanza maggiore di 6. pollici, di quello che un Miope a cui la distanza di 2, o 3 pollici basta per veder distintamente gli oggetti.

In generale però alcuni autori calcolano con approssimazione l'ingrandimento di queste lenti omettendo l'aumento $h'nH'$ dell'angolo ottico, e riducendo tutta l'operazione alla sola nuova ideale

posizione F′h′ dell'oggetto rispetto all'occhio mno. In tale non molto esatta ipotesi si hanno i triangoli simili nFH, nF′h′, nei quali si ha FH : F′h′ :: nF : nF′, ossia la grandezza assoluta dell'oggetto stà alla grandezza ideale, come la distanza reale dell'oggetto dall'occhio, sta al limite più corto della visione distinta. Così supposto che il foco principale GF della lente sia di 5;^linee^ la grossezza della lente Gp = 2^lin.^; la distanza pn dell'occhio dalla lente = 2;^lin.^ ed il limite più corto della visione distinta nF′ = 6^pol.^ = 72;^lin.^ si troverà Fn = FG + Gp + pn = 9^lin.^; e per conseguenza $\frac{nF'}{nF} = \frac{72}{9} = 8$ ingrandimento cercato, che è però minore del vero.

Quanto più corto sarà il foco principale della lente, restando invariate le altre quantità; sempre maggiore diverrà l'aumento dell'oggetto; poichè sempre più grande sarà il numero delle volte, che nF starà in nF′. Convien però osservare che al diminuire della focale lunghezza, cresce la convessità della curva focale FHg, e per conseguenza minore diverrà l'estenzione del contatto,

o coincidenza fisica dell'oggetto colla curva suddetta. Allora adunque non si potranno osservare distintamente che oggetti minimi, e per conseguenza l'aumento della grandezza apparente trae seco la diminuzione del campo, alla quale aggiungasi quella della chiarezza, giacchè le lenti di brevissimo foco hanno necessariamente tenuissima apertura, cosicchè per esse non può passare che piccola quantità di luce.

237. In diverse maniere si preparano le lenti microscopiche, ossia a foco brevissimo. Le più esatte sono lavorate sulle forme come si pratica delle lenti comuni. Talvolta si fondono pezzetti di cristallo al tubo ferraminatario, e si ottengono piccole sfere cristalline, che si appellano lenti migliavine. Si può eziandio sostituire l'acqua al cristallo facendo in una lastrina metallica un piccol foro avente per diametro una metà, o un quarto di linea, ed infondendovi una gocciolina d'acqua, che prendendo la figura sferica, farà ottimamente le veci di una lente microscopica.

Fig.ª 77

Finalmente alle lenti si può sostituire un forellino semplice fatto in una lastra metallica. Infatti un piccolo oggetto AB (fig.ª 77), che essendo troppo vicino all'occhio gcg' non gli riesce visibile, interponendo fra l'oggetto, e l'occhio una lastra DE con piccol foro h non solo gli vien visibile, ma apparisce più grande sebbene non esattamente terminato al lembi. Per render ragione di questo fenomeno convien osservare, che per la troppa vicinanza dell'oggetto AB, i raggi entrano così divergenti nell'occhio gcg', che o non possono convergere, o i punti di concorso a, b cadono al di là della retina GH; quindi si formeranno sopra di essa i soliti circoli di diffusione, i quali saranno ~~tato~~ più estesi, e per conseguenza tanto maggiore la confusione, e la sovrapposizione di essi, quanto più distanti dal centro c della pupilla saranno i punti g, g' in cui cadono i raggi di luce. Per lo contrario se interposto il piano DE facciasi in modo per mezzo del foro h, che i raggi incidenti nell'occhio passino a piccolissima distanza del

centro c, i raggi anderanno bensì come prima a riunirsi nei punti a, b al di là della retina, ma i circoli di diffusione sulla retina saranno molto più piccoli che prima; le sovraposizioni di essi saranno molto più estese, e però sulla retina GH si dipingerà un immagine mediocremente distinta dell'oggetto AB. Rapporto all'ingrandimento esso non deriva in tal caso che dall'accennata consociazione della visione distinta, colla distanza minima di 6.$^{pol.}$ che per essa richiedesi. Siccome la piccolezza del foro h intercetta la massima parte de' raggi che entrerebbero nella pupilla, perciò l'oggetto oltre ad esser mal terminato, apparirà oscuro, ed estremamente languido.

Chi bramasse più estese cognizioni intorno ai microscopj semplici, ed alle particolari osservazioni fatte per mezzo di essi, può leggere fra molti altri il Trattato d'Ottica di Roberto Smith Vol: 2 § 986, e seg:

Microscopj Composti

Fig.a 78

238 Il più semplice fra i Microscopj composti non contiene che due sole lenti convesse L., E. (fig.a 78) la prima che per esser più vicina all'oggetto PQ appellasi objettivo, è molto convessa, ed il suo foco principale LF è cortissimo. La distanza LQ del piccolo oggetto QP supera di poco la lunghezza focale principale LF, di maniera che l'immagine rovesciata pq può formarsi a grandissima distanza dall'objettivo L, ed essere per conseguenza molto maggiore che l'oggetto (190). Se quest'immagine coincida col foco principale dell'oculare E, l'occhio collocato in O la vedrà distintamente come nei Telescopj Astronomici (   ). Ora l'oggetto apparirà ingrandito per due motivi: 1.° perchè se si vedesse ad occhio nudo l'immagine qp, essa comparirebbe altrettanto maggiore del suo oggetto QP visto alla stessa distanza, quanto essa è realmente più grande che l'oggetto: e poichè a motivo de' triangoli simili LQP, Lqp si ha pq : PQ :: Lq : LQ; è chiaro che

(236) il detto ingrandimento sarà espresso da $\frac{I.q}{I.Q}$:
2°. l'immagine pq, e l'oculare E collocata per osservarla, formano un vero microscopio semplice (235); ma l'immagine pq benchè per se stessa più grande che l'oggetto, non cesserà però di risvegliar in noi l'idea di un oggetto piccolo, per osservare il quale siamo costretti ad avvicinarlo all'occhio nel limite minimo di distanza per la visione distinta. Quindi l'immagine pq osservata coll'oculare E, non solo apparirà ingrandita pel reale aumento dell'angolo ottico, ma acquisterà eziandio nuovo incremento per la posizione ideale che noi le attribuiamo alla distanza di 6 poll: per lo meno, dal nostr'occhio.

Tale incremento non è stato considerato nel calcolo dell'ingrandimento de' Telescopj, poichè trattandosi di oggetti lontani, ed estesi, la visione di essi distinta, o indistinta che ella siasi non è accompagnata come per gli oggetti piccoli dall'idea di una determinata distanza fra l'occhio, e l'oggetto osservato.

239. Ora per determinare la forza amplificativa,

o l'ingrandimento del microscopio a due lenti, suppongasi che l'immagine qp dipingasi ad una data distanza L.q = f′ dalla lente objettiva L, e che E.q = f esprima il foco principale dell'oculare E; e che QL = D sia la distanza dell'oggetto dall'objettivo. Dal punto p che il suppongo il punto estremo di contatto fisico dell'immagine pq colla curva focale principale dell'oculare E, tirisi al suo centro ottico E il raggio principale pE; è chiaro, che il raggio lucido LpA che passa per p dopo le due refrazioni nell'oculare emergerà secondo la direzione AO parallela al raggio principale pE, e taglierà l'asse O'LE in un punto O, nel quale se facciasi cadere il centro della pupilla, si avrà l'angolo ottico E.OA = qE.p sotto cui apparirà l'immagine qp, la quale siccome appartiene ad un oggetto già conosciuto per minimo, verrà trasportata in forza dell'accennata consociazione d'idea(   ) al limite minimo della visione distinta per l'occhio inerme, alla distanza cioè di 6. pollici circa.

Ciò posto prendasi sull'asse un punto O' dis-

tante dall'oggetto QP quanto è il limite minimo della visione distinta ad occhio nudo, cosicchè abbiasi $O'Q = 6^{pol.} = l$. Dal punto O' si tiri la retta O'P' parallela all'asse ottico AO, e per conseguenza anche al raggio principale E.p, e che incontri in P' l'oggetto QP prolungato e supposto normale all'asse; indi presa $O'R = E.q = f$, si tiri la RR' normale all'asse, e per conseguenza parallela, ed uguale all'immagine pq. Chiamata n la lunghezza assoluta dell'oggetto QP, dai triangoli simili QLP, qLp si ha $LQ(\partial) : QP(n) :: Lq(f') : pq = \frac{f'n}{\partial}$. Inoltre dai triangoli simili O'RR', OQP' si avrà $O'R(=E.q=f) : O'Q(l) :: RR'\left(=pq=\frac{f'n}{\partial}\right) : QP' = \frac{f'l}{f\partial} \times n$, valore assoluto dell'immagine RR', o pq riferita alla posizione QP' conveniente al limite minimo della visione distinta ad occhio nudo. Ora se si rifletta che $QP = n$; $QP' = \frac{f'l}{f\partial} = \times n$ sono tangenti degli angoli $QO'P = m$; $QO'P' = m'$ esprimenti le grandezze apparenti dell'oggetto, e della sua immagine alla distanza $l = 6^{pol.}$ si avrà $QP(n) : QP\left(\frac{f'l}{f\partial} \times \partial\right) :: \text{tang } QO'P(m) : \text{tang } QO'P'(m')$; quindi $\frac{\text{tan } m'}{\text{tan } m} = \frac{f'l}{f\partial}$; e se gli angoli m' m sono piccoli si avrà $\frac{m'}{m} =$

$\frac{f'l}{fd}$ (D). Avvertasi che trattandosi di microscopj, ne' quali la distanza d dell'oggetto è sempre di poche linee, la grossezza delle lenti non è più una quantità evanescente, quindi per comprenderla in un modo facile nel calcolo dell'ingrandimento le lunghezze f, f', d dai centri ottici L, E delle due lenti.

240. Si sa che quanto più si avvicina l'oggetto QP al foco principale F di una lente, tanto più distante è da essa l'immagine qp; quindi la quantità QL = d; f' Lq sono in ragione inversa; ossia quanto cresce d, scema f', e reciprocamente. Dunque se si accosti l'oggetto QP al foco F dell'oculare scemerà d, e crescerà f'; quindi nella formola (D) crescerà il rapporto $\frac{m'}{m}$ ossia l'ingrandimento dell'oggetto. In questo caso crescendo f', la curva focale a cui si addatta, e si piega l'immagine pq diventa meno convessa, e per conseguenza maggiore sarà il tratto assoluto di contatto fisico colla curva focale principale dell'oculare E; crescerà adunque l'area della visione distinta; ma minore sarà la chiarezza dell'immagine, poichè la luce

che attraversa l'objettivo distendesi qui, sopra un area dell'immagine più grande che prima. A tale inconveniente si potrebbe ovviare aumentando l'apertura dell'oggettivo, ma tal ripiego rende imperfetta l'immagine a motivo della diversa refrangibilità della luce, e delle zone colorate che ne risultano, come frà poco vedremo.

Che se restando invariata la distanza d, e per conseguenza anche il foco corrispondente f' si sostituisca una lente oculare il cui foco principale f sia più piccolo che prima; crescerà di nuovo il rapporto $\frac{m'}{m}$; ma essendo f molto piccolo, la curva focale dell'oculare sarà molto convessa; quindi l'area di contatto fisico dell'immagine pq verrà notabilmente diminuita.

Se finalmente facciasi crescere f', e diminuire f, che val quanto dire se si avvicini molto l'oggetto QP alla lente L, ed adopresi una oculare E di cortissimo foco, il rapporto $\frac{m'}{m}$ diverrà grandissimo; ma si avrà il doppio svantaggio di un immagine pallida, e di un campo strettissimo.

241. Quando vogliasi vedere una gran parte dell'immagine pq si pone fra l'oculare E, e l'objettivo I una lente convessa, la quale (223) avvicinando l'immagine pq all'objettivo I, restringendone l'estenzione, la renderà per la maggior parte coincidente alla curva focale principale dell'oculare E, e per tal modo si aumenterà il campo, e nello stesso punto si diminuirà la lunghezza del microscopio. Tale è la costruzione della maggior parte de' Microscopj composti, intorno ai quali chi bramasse più estese cognizioni può consultare l'opera di Smith vol: 1°. pag: 66, e vol 2°. pag 320, e seg:

Imperfezione de' Telescopj, e Microscopj comuni; o dell'aberrazione di sfericità e di refrangibilità.

242. A due supposizioni sono stati appoggiati quasi tutti i calcoli, e gran parte delle considerazioni, e risulta, che si sono ottenuti intorno ai fochi delle lenti, e nelle combinazioni di esse nelle macchine Diottriche. 1°. Che tutti i raggi di luce pro-

venienti da un oggetto luminoso, o fossero omogenei di una data specie, o se eterogenei tutti fossero soggetti allo stesso rapporto di refrazione: 2°. Che sebbene i suddetti raggi omogenei cadessero sopra diversi punti della lente sferica a diverse distanze dall'asse, o dal raggio principale, pure dopo le refrazioni concoressero tutti in un sol punto o dell'asse, o del raggio principale. Ora egli è facile il dimostrare che nè l'una, nè l'altra ipotesi è appoggiata al vero, e che i diffetti che si osservano nelle macchine diottriche provengono appunto da quelle cagioni, che nelle accennate ipotesi vengono escluse, o trascurate.

243. A tal fine basta richiamar alla mente quanto si è detto (135, e seg.) intorno alla diversa refrangibilità de' raggi colorati, e del diverso valore del rapporto di refrazione p:q che entra nella formola generale del foco delle lenti (184). Così se pongasi che da un punto luminoso collocato sull'asse di una lente convessa isoscele AD (fig.ª 79) cadano su di essa i raggi solari EA, GD paralleli.

Fig.ª 79

fra loro si ha per questo caso (196. caso 1°) $f=\frac{qr}{2(p-q)}$ (A).
Ma poichè i raggi laterali EA, GD non sono normali alle due superficie della lente, è chiaro che essi si divideranno nei sette colori, e che i più refrangibili cioè i paonazzi si riuniranno prossimamente in un punto B più vicino alla lente che il punto O concorso de' raggi medj, e che il punto R dove si riuniscono i raggi meno refrangibili, cioè i rossi. Quello che si è detto dei raggi GD, EA, estender si deve a tutti i raggi bianchi che formano il cilindro lucido GDAE, cosicchè B sarà il foco di tutti i raggi paonazzi &ct.

Per determinare la distanza de' suddetti fochi colorati B, O, R dalla lente AD, altro non si deve fare, che sostituire nella formola generale (A) i valori di p, e q convenienti ai diversi raggi colorati: così pei raggi rossi essendo $p=1,54$; $q=1$ (155) si troverà $f=IR=\frac{r}{2(1,54-1)}=\frac{r}{1,08}$; pei raggi medj $p=1,55$; $q=1$; quindi $f=IO=\frac{r}{1,10}$; finalmente pei raggi paonazzi $p=1,56$; $q=1$; quindi $f=IB=\frac{r}{1,12}$. E poichè lo spazio di diffusione (   ) BR

è = IR − IB, sostituendo i valori analitici trovati si avrà $BR = \frac{r}{1,08} - \frac{r}{1,12} = \frac{0,04}{1,2096} \times r = \frac{0,01}{0,3024} \times r$: dunque $IR : BR :: \frac{r}{1,08} : \frac{(0,01)r}{0,3024} :: 28 : 1$; quindi lo spazio di diffuzione BR è uguale ad una ventottesima parte del foco principale de' raggi rossi.

Paragonando ora lo spazio di diffuzione BR col foco principale BI de' raggi paonazzi si avrà $BI : BR :: \frac{r}{1,12} : \frac{(0,01)r}{0,3024} :: 27 : 1$; donde si vede che lo spazio di diffuzione è uguale alla ventesima settima parte del foco principale de' raggi paonazzi. Lo spazio di diffuzione BR entro cui restan comprese tutte le immagini colorate, rappresenta l'effetto della diversa refrazione ne' raggi della luce solare, e chiamasi generalmente aberazione di refrangibilità in longitudine (183).

244. Segue da tutto ciò 1°. Che da una lente comune o semplice, non si può sperare immagine unica, e precisa di un punto, o di un oggetto luminoso bianco, quali sono in generale tutti i corpi celesti. 2° Che siccome i coni ABD, AOD, ARD aventi per base l'apertura della lente AD, e for-

mati rispettivamente dai raggi paonazzi, verdi, e rossi, siccome dissi; gli accennati coni hanno il volume, o porzione comune DBA, è chiaro che entro questo spazio passano mescolati insieme tutti i raggi colorati, e che per conseguenza l'accennato spazio DBA formerà un cono bianco che il primo strato conico che cingerà all'intorno il cono bianco DBA conterrà tutti i raggi fuorchè i paonazzi; l'altro strato conico, che cinge il primo li conterrà tutti fuorchè i paonazzi ed i turchini, e così di seguito sino allo strato esteriore, il quale non conterrà che i soli raggi rossi.

245. Preso adunque sull'asse un punto n fra la lente, ed il vertice B del cono bianco, se facciasi passare per n un piano HK normale all'asse FR, e segante il cono lucido, e tutti gli altri strati conici che lo cingono, si dipingerà sopra di esso un circoletto bianco ana' circondato all'interno da sei zone circolari a colori secondarj tranne l'ultima, e la massima fra tutte cnc' che sarà tinta di rosso prismatico.

Se il piano passi pel vertice B del cono bianco, allora l'areola bianca si riduce a un punto B circondato all'intorno dalle accennate sei zone; l'ultima delle quali sarà ancor rossa: il suo diametro però sarà minore che nella posizione precedente.

Siccome i raggi diversamente colorati, dopo essersi intersecati nei vertici B,O,R dei rispettivi coni, continuando il loro camino formano i coni opposti L.BL', MOM', NRN, è chiaro che facendo cadere il piano al di là del punto B, l'immagine sarebbe sempre bianca; se sopra il piano non cadessero che raggi costituenti il cono bianco L.BL' opposto al primo ABD, esclusi tutti gli strati conici a tinte secondarie che lo cingono all'intorno; per esempio nella posizione COC', corrispondente all'intersezione de' raggi estremi paonazzi ABC, DBC' coi raggi estremi rossi ACR, DCR, è chiaro, che lo spettro apparirebbe bianco se nella sezione CC' non cadessero che i raggi lucidi formanti il cono bianco LBL' opposto all'altro cono bianco ABD escludendo tutti gli altri strati e tinte secondarie che lo cingono al-

l'intorno: ma poichè il piano suddetto taglia simultaneamente e l'uno, e gli altri, intendesi ed il cono lucido, e gli strati conici, ognun vede, che le tinte di questi s'imprimeranno sulla sezione bianca del primo, e risulteranno quindi diverse zone più o meno bianche secondo che gli strati conici a cui appartengono conteranno maggior, o minor numero di raggi primitivi. Così nella data posizione del piano segante la massima zona estrema che passa per C,C' presenterà un color secondario risultante dalla mescolanza de' raggi paonazzi, e dei rossi: la zona attigua sarà tinta di un color secondario risultante dalla mescolanza de' raggi rossi, ed aranciati per una parte, e de' turchini per l'altra: la terza zona conterrà un miscuglio de' raggi rossi, aranciati, e gialli da un canto, e turchini, e celesti dall'altro.

Nella stessa maniera si potranno determinare non solo le tinte delle zone che si formano nella posizione CC', ma quelle pur anco, che dipingonsi sul piano segante qualunque sia la posizio-

ne che gli si dia. Se per esem: collochisi in MM',
risulterà uno spettro colle solite zone colorate, fra
le quali la più grande non sarà più tinta di rosso,
come nelle altre indicate posizioni, ma di pao-
nazzo; l'altra di un color secondario composto dal
paonazzo, e dal turchino; e così di seguito, nè si
riscontrerà alcuna averla che si possa dir veramen-
te bianca. Nell'altra posizione L.L'. le zone colo-
rate trovansi nella stessa maniera disposte, e for-
mate che nella precedente MM', colla sola differen-
za che nella metà dello spettro vi sarà un areola
bianca il di cui diametro è NN'.

246. Ritornando alle summentovate sezioni circo-
lari aa', CC', MM', LL' .... ed esaminando attenta-
mente le diverse dimensioni che possono acquista-
re, si vedrà di leggieri che fra tutte la più piccola
è la COC', quella cioè che formasi sul piano segan-
te allorchè esso passa pei punti C, C' d'intersezione
de' raggi estremi paonazzi co' raggi estremi rossi.
Ora poichè non si può avere di un dato punto
luminoso un'immagine precisa, e ridotta ad un

punto solo, come pure si converebbe, ragion vuole, che fra i molti spettri del punto luminoso assumasi il meno esteso, cioè CC' per rappresentare l'immagine dell'oggetto, e per fissare la lunghezza focale della lente, la quale altrimenti sarebbe indeterminatissima.

Per determinare poi il diametro dell'assunto spettro CC', si rappresenta per a l'apertura DA della lente, cosicchè $ID = AI = \frac{a}{2}$, e si osservi che per la somiglianza de' triangoli rettangoli RID, ROC, AIB, ossia DIB, BOC, si ha ID:CO::IR:OR.

ID:CO::BI:BO, dunque

IR:OR::IB:OB, ossia

IR + IB : OR + BO (= BR) :: IR : OR :

paragonando quest'analogia colla prima si avrà IR + IB : BR :: DI : CO ; quindi sostituiti i valori delle linee (243) si troverà ....

$$\ldots CO = \frac{\frac{(0,01)a}{(0,3024)^2}}{\frac{1}{1,08}+\frac{1}{1,12}} = \frac{(0,01653)a}{1,81869} = (0,0091)a \text{, quin-}$$

di 2CO, ossia il diametro $CC' = (0,0182)a = (0,02)a$

prossimamente: donde si vede, che il diametro minimo CC' dello spettro sta al diametro DA dell'apertura :: 0,02 : 1 :: 2 : 100 :: 1 : 55. Il diametro minimo CC' da alcuni ottici viene appellato diametro dell'iride, o aberazione di refrangibilità in latitudine.

247. Volendosi ora determinare la lunghezza focale IO corrispondente al minimo diametro CC' dell'aberazione latitudinale, basterà osservare che dai due triangoli rettangoli simili AIB, BOC si ha $AI : CO :: IB : BO = \frac{IB \cdot OC}{AI} = \frac{\frac{r}{1,12} \times (0,0091)a}{\frac{a}{2}} = \ldots\ldots$ $\frac{r}{0,56} \times (0,0091) = (0,0162)r$. Quindi la cercata distanza focale $OI = IB + BO = \frac{r}{1,12} + (0,0162)r = ($ $(0,8928)r + (0,0162)r = (0,909)r$.

Osservisi ora che la lunghezza focale de' raggi medj è espressa (243) da $f = \frac{r}{1,10} = (0,909)r$; e che per conseguenza il circolo COC' d'aberazione in latitudine taglia l'asse in quel punto in cui trovasi il foco de' raggi medj.

248. Quanto si è detto intorno alla lunghezza assoluta dell'aberazione in latitudine (243) e del diametro dell'aberazione in latitudine non ris-

guarda che quelle sole lenti, che sono formate di vetro comune. Adoperando un altro vetro, per esem: il Flint, in cui la forza dispersiva de' raggi estremi è più grande che nel vetro comune, le suddette aberazioni acquisterebbero valori diversi dai precedenti.

Del resto se si rifletta sulla natura delle formole esprimenti le grandezze BR', CC' delle aberazioni di refrangibilità in longitudine, e in latitudine, si vedrà (243), che il valore della aberazione longitudinale RB non dipende che della forza refringente del mezzo, e dal valore del raggio r di curvatura della lente isoscele; e che per lo contrario quello dell'aberazione latitudinale CC' dipende dalla forza refringente, o dal diametro a dell'apertura della lente (246). Dal che si vede, che in un dato Cannocchiale ordinario, l'aberazione di longitudine, ossia lo spazio di diffusione BR non può esser diminuito in verun modo, e che l'aberazione di latitudine CC' può esser notabilmente scemata col restringere

il diametro a dell'apertura. Ma tal rimedio non va mai disgiunto dalla diminuzione di chiarezza, che è sempre proporzionale alla quantità di luce che passa per l'objettivo: ora siccome le suddette quantità di luce stanno trà loro come i quadrati delle aperture delle lenti (   ), ognun vede, che una mediocre diminuzione del diametro d'apertura, produce subito sensibilissima diminuzione di luce, e per conseguenza anche di chiarezza.

249. Non solo nel calcolo delle lunghezze focali; ma in quello eziandio dell'aberazione di refrangibilità abbiamo supposto che tutti i raggi omogenei di una data specie cadendo sopra una lente arbitrariamente estesa APD dopo le refrazioni si uniranno in un sol punto B, ovvero O, o R secondo che essi sono o paonazzi, o medj, o rossi, cosicchè il punto luminoso bianco collocato sull'asse venga rappresentato da sette punti colorati sparsi sullo spazio di diffuzione BR.

Ma tal supposizione non è manifestamente opposta alla sperienza, ed alla natura del mezzo re-

Fig.ª 80

fringente. Imperocchè supposto che sulla lente convessa IQ (fig.ª 80) cadano soltanto raggi omogenei di una data specie, e che F esprima il foco di que' raggi che cadono vicinissimi all'asse CF della lente; il calcolo comprovato dalla sperienza dimostra, che i raggi RG, PQ, R'I incidenti sulla lente a diverse distanze dell'asse, dopo le refrazioni lo tagliano ne' punti K, f tanto più vicini alla lente, quanto i punti d'incidenza I, G, Q sono lontani dal centro N dell'ampiezza lenticolare: Ora se dal punto H, in cui il raggio refratto KT taglia il raggio estremo Qf prolungato, si abbassi la normale HL sull'asse, si vedrà che l'effetto della sfericità delle lenti si riduce a far crescere continuamente l'angolo TKO dal nulla sino all'angolo IfO, e di far scemare continuamente la retta Kf da Ff quando TK coincide coll'asse, sino al nulla quando TK coincide colla direzione If del raggio estremo rifratto. Quindi nel triangolo variabile KHF, si darà tal combinazione fra il valore dell'angolo variabile, K, e del lato variabile Kf, che l'altezza

HL in qualche luogo diverrà neccessariamente massima: ed allora tutti i raggi lucidi o prima, o dopo il loro incrocicchiamento sull'asse della lente passeranno per l'area circolare avente per semidiametro la retta HL, che sarà perciò il semidiametro dell'aberazione di sfericità. La suddetta areola circolare siccome quella che riceve tutti i raggi omogenei emergenti da tutta l'apertura della lente, dovrà considerarsi un'immagine; o per meglio dire spettro del punto luminoso. Non mi permettendo la strettezza del tempo di esporre qui tutto il calcolo neccessario per la determinazione del valore di HL, intorno a che consultar si può la Fisica di Canovai § 590, Scheuffer Diopt: pag: 100, ed Eulero Diottrica volu: 1°, mi limiterò ad osservare 1°, che il diametro dell'aberazione di sfericità è un nulla rispetto al diametro di aberazione di rifrangibilità, giacchè il primo appena arriva ad $\frac{1}{5449}$ del diametro di rifrangibilità. 2°. che provenendo la aberazione di sfericità dalla maggior, o minor distanza de' raggi incidenti dall'asse, potrà esser diminuita

col ristringere l'apertura della lente, ripiego che diminuisce anche il diametro di refrangibilità (248); nel qual caso però si avrebbe il danno dello scemamento di chiarezza, come altrove si è già notato.

Il grande Newton persuaso erroneamente che non fosse possibile di correggere le aberazioni di refrangibilità, e colpito dall'altra parte dalla pochezza della aberazione di sfericità, che considerata negli specchj concavi non arriva alla 32.esima parte di quella che avrebbe luogo in una lente della stessa apertura che lo specchio, depose intieramente il pensiero della correzione de' Cannocchiali Diottrici; e tutto si rivolse a sostituire ad essi altri Telescopj che fossero esenti dalla massima delle aberazioni, che è quella di rifrangibilità, e non fossero soggetti che alla minima delle aberazioni di sfericità. In qual modo poi egli, ed altri Autori abbiano ciò ottenuto, verrà partitamente indicato nel seguente articolo.

Telescopj Catadiottrici

250. Chiamansi Telescopj Catadiottrici quelle macchine, che per mezzo di ingegnose combinazioni di lenti, e di specchi sferici rendono visibili, ed ingranditi gli oggetti lontani. Il primo inventore di tali combinazioni è stato senza dubbio il P. Zucchi Gesuita Parmigiano. Il Sig.r Gregorij Inglese perfezionò l'invenzione del Zucchi. Cassaigrain modificò le correzioni di Gregorij; Newton semplificò la macchina col sostituire uno specchio piano ad uno sferico. Finalmente il celebre Herschel seguendo le tracce, ed i progetti di alcuni celebri Fisici, ridusse queste macchine alla più semplice costruzione togliendo lo specchio minore, e riducendole ad un solo specchio concavo, e ad una lente convessa. Esporrò brevemente quanto occorre a sapersi di più necessario intorno a ciascuna delle accennate combinazioni.

Telescopio Catadiottrico Herschelliano

251. Chiamo Herschelliano il Telescopio formato di un solo specchio concavo, e di una sola lente convessa non perchè Herschel ne sia stato l'inventore, ma perchè egli ne è stato il costruttore più esatto, rendendolo poi celebratissimo con sorprendenti scoperte Astronomiche. Eccone in succinto la descrizione.

Collocato nel fondo del tubo cilindrico DK (fig.ª 81) uno specchio concavo GH in guisa che il suo asse principale CM formi un angolo coll'asse RM del cilindro, e supposto che C sia il centro dello specchio GH, si tirino dai punti estremi A, B dell'oggetto luminoso AB gli assi secondarj ACa, BCb, i quali attesa l'inclinazione de' sopraccennati assi, si dipingeranno ad uno dei lati EK del tubo DLKE. Tutti i raggi luminosi lanciati dai punti A, B dell'oggetto si uniranno dopo la riflessione contro lo specchio GH nei punti a, b dei

Fig.ª 81

rispettivi assi secondarj, dipingendo ivi una immagine rovesciata ab dell'oggetto AB, la quale sarà vicinissima al lato EK del tubo. Per mezzo di una lente convessa NP collocata in guisa, che la sua curva focale principale coincida coll'immagine ab, l'occhio posto in v vedrà la suddetta immagine ingrandita nella maniera stessa che nel l'annocchiale astronomico. In tal posizione l'osservatore non intercetta alcun raggio di luce.

Siccome in questa macchina la luce non soffre che una sola riflessione, e le rifrazioni di una sola lente, è chiaro che essa arriverà all'occhio v molto più intensa che nelle altre macchine, in cui debba andar soggetta a maggior numero di reflessioni, e di rifrazioni. Egli è inoltre manifesto che il luogo apparente in cui l'osservatore riferirà l'immagine ab sarà quasi opposto al luogo reale dell'oggetto AB, e che apparirà rovesciato.

Il gran Telescopio di Herschel collocato a ha lo specchio principale di 38 piedi parigini di foco, e di 4 piedi di diametro d'apertura.

Il peso del solo specchio principale è di 1955. libbre Francesi (3000 lib: piac: pros:). La sola spesa de' materiali per la montatura, e per le giornate degli operaj andò a 74 mila franchi.

Telescopio Newtoniano

252 Collocato nel fondo di un tubo QGHR (fig.^a 82) uno specchio concavo metallico MN, il cui asse sia AD, e C il centro di curvatura, ognun vede che se a gran distanza siavi un oggetto luminoso AB, l'immagine di lui tolti gli ostacoli si dipingerebbe, secondo le leggi di Cattotrica in a'b', onde se si potesse collocare sull'asse AD una picciola lente pl, il cui foco principale coincidesse coll'immagine a'b', l'occhio dell'osservatore collocato in p' vedrebbe l'immagine a'b' precisamente come in un telescopio astronomico. Ma la diminuzione della luce, che l'opacità dell'osservatore impedirebbe di cadere sullo specchio principale MN, rende inutile, ed impraticabile tal disposizione dell'oculare.

Fig.^a 82

Per rimediare a questo inconveniente Newton

collocò tra lo specchio principale ed il suo foco a'b'
uno specchietto piano metallico FE di figura ovale
sostenuto da una sotil lamina metallica GC, la qua-
le presentando la costa allo specchio MN, intercetta
piccolissima quantità di luce. Il centro, o punto
di mezzo c dello specchietto cade sull'asse in modo,
che semiretto sia l'angolo FcD formato dallo spec-
chio coll'asse. In tal posizion di cose, ognun vede,
che se il raggio AD coincidente coll'asse del Telesco-
pio potesse attraversare lo specchietto, e cadere sul-
lo specchio principale, verrebbe da esso rimandato
sulla direzione dell'asse Dc, e battendo contro lo spec-
chio verrebbe riflesso secondo cV normale all'asse AD.
Similmente se il raggio luminoso coincidente col-
l'asse secondario BCM dopo essere stato riflesso dal-
lo specchio principale incontrasse in r' il piano
dello specchietto, sarebbe riflesso con tal direzione
r'b che la posizione rispettiva dei due assi riflessi
cV, r'b sia la stessa che quella dei due assi diretti
cv, r'b' (   ). In generale poichè la riflessione de'
specchj piani non cangia la posizione angolare

delle rette, è chiaro, che tutti que' raggi lucidi, secondarj agli accennati assi AD, BM, quali a cagion d'esempio sono AD', AD'', Bm, Bm' .... che dopo la riflessione nello specchio concavo MN incontrano lo specchietto piano FE, questi raggi, dissi, verranno di nuovo riflessi cogli stessi gradi di convergenza verso i loro assi riflessi cV, r'b, che avevano prima; cosichè in vece di unirsi in a', b' si uniranno in a, b, e si avrà ca = ca'; r'b = r'b'; ......, quindi risulterà un'immagine ab dell'oggetto AB, perfettamente simile, ed uguale a quella, che tolto lo specchietto EF avrebbero dipinta in a'b'.

Se dunque di fianco al tubo principale QGHR se ne collochi un altro OSTK cosicchè il suo asse sia normale all'asse AD dello specchio concavo, e che passi pel mezzo c dello specchietto piano, allora per mezzo di una lente PL dello stesso foco che pl, si vedrà l'immagine ab precisamente nella stessa maniera che si vedrebbe l'immagine a'b' per mezzo della lente ideale pl. Il calcolo dell'ingrandimento è, come l'hò già avvertito, lo stesso che quello dei

Cannocchiali astronomici.

In questi telescopj l'immagine ab ha rispetto all'asse principale una posizione opposta a quella dell'oggetto, il quale se suppongasi collocato in sinistra dell'asse principale diretto AD, la sua immagine ab trovasi a diritta dell'asse principale riflesso cV. Egli è inoltre manifesto che il luogo apparente a cui l'occhio riferisce l'immagine ab dista di 90° dal luogo reale dell'oggetto AB, il che rende a chi non è molto pratico, malagevole l'uso di questo strumento. Rispetto alle dimensioni che debbono avere le parti esenziali di questo telescopio veggasi Scheuffer Catot: pag: 34.

252. Aggiungerò qui alcune cose intorno alla determinazione grafica di que' raggi lucidi, che nel telescopio Newtoniano realmente concorrono a dipingere dopo due riflessioni l'immagine ab.

Data adunque la posizione dell'oggetto luminoso AB, e dei due specchi MN, FE, e le dimensioni di quest'ultimo, si tirino dai punti estremi A, B gli assi ACD, BCM, e si determini colle solite re-

gole (   ) la posizione della immagine a'b', come se non esistesse lo specchietto piano. Dal punto A dell'oggetto si tirino due raggi lucidi, che passino per le opposte estremità E, F dello specchietto: questi esprimeranno i due primi raggi che non essendo incercetti dallo specchietto arriveranno allo specchio concavo, e verranno da esso riflessi verso l'immagine a'; tutta la porzione dello specchio compresa fra questi due raggi non riceve attomo di luce dal punto luminoso A per l'interposizione dello specchietto.

Dal punto a' si tirino due rette che passino per le sudette estremità E, F dello specchietto, e che arrivino sino allo specchio principale MN: esse esprimeranno manifestamente i primi fra i raggi riflessi dallo specchio principale che arrivino al foco a' senza esser riflessi dallo specchietto piano EF; e tutti gli altri raggi riflessi, che sono compresi fra i due accennati urtano sicuramente nello specchietto, e vengon di nuovo riflessi verso a'.

Da tutto ciò si vede, che fra gl'infiniti raggi lanciati dal A sullo specchio principale MN, que' soli

saranno utilmente riflessi, che cadranno in quello spazio dello specchio compreso frà le rette condotte dal punto A, e dal suo foco a' pei punti estremi E, F dello specchietto piano.

Che se trattisi del punto luminoso B collocato fuori dell'asse, e la cui immagine esiste nel punto b' dell'asse secondario BCM, ognun vede 1.° Che se l'asse secondario non incontra lo specchietto, nessuno de' raggi luminosi che rispetto all'asse BM giaciono dalla parte opposta a quella dello specchietto potrà dopo la riflessione sullo specchio principale, incontrare lo specchietto piano, e per conseguenza tutti questi raggi sono inutili per la formazione dell'immagine ab: 2.° Che frà i raggi luminosi lanciati da B, e giacenti dalla stessa parte dell'asse BM in cui trovasi lo specchietto EF, quello che passa per l'estremità E dello specchietto più rimota dall'asse potrà dopo la riflessione nel concavo MN urtare contro lo specchietto, e divenir per conseguenza raggio utile, per la formazione dell'immagine b del punto luminoso B.

Telescopio Catadiottrico Gregoriano

Fig.^a 83

253. Questo strumento consta di uno specchio metallico concavo EMG (fig.^a 83) forato nel mezzo con foro circolare, il cui diametro è mMm'. L'asse MCA dello specchio coincide con quello del tubo DFKH entro cui è rinchiuso, ed il suo centro cade in C. Se dai punti estremi A, B di un oggetto luminoso posto a notabile distanza si tirino gli assi ACM, BCb, ed i raggi Aa', Aa''.....Bb', Bb'', Bb'''..... rispettivamente secondarj, essi dopo la riflessione contro lo specchio principale concorreranno in α, B, e dipingeranno l'immagine rovesciata αβ dell'oggetto AB.

Ora se introducasi nello stromento uno specchietto piccolo n'''Np il cui diametro d'apertura n'''p sia uguale al diametro mm' del foro circolare dello specchio concavo.

Ciò posto, se una lente convessa oculare PQ sia collocata in modo nell'asse del Telescopio, che la sua curva focale principale coincida coll'immagine $\alpha'\beta'$, i raggi da essa incidenti sulla lente emergeranno paralleli ai rispettivi raggi principali α'TO, β'TZ, e l'occhio collocato nell'intersezione O de' cilindri lucidi estremi vedrà l'immagine $\alpha'\beta'$, e crederà di veder l'oggetto AB sotto l'angolo ottico $TOt = \alpha'T\beta'$.

234. Per determinare l'ingrandimento di questo Telescopio si faccia per semplicità del calcolo

— il raggio di curvatura $CM = r$;
la lunghezza focale $Ma = f$;
la lunghezza focale principale $Nf = \varphi'$;
la distanza della prima immagine dallo specchietto $Na = d$;

la lunghezza focale principale dell'oculare $T\alpha' = \varphi''$
l'angolo ottico naturale $ACB = \alpha C\beta = m$
l'angolo ottico ad occhio armato $tOT = \beta'T\alpha' = m'$
quindi si avrà $C\alpha = CM - \alpha M = r - f$; il raggio di curvatura $C'N$ dello specchietto N sarà $= 2Nf = 2\varphi'$ (Catto); $C\alpha' = C'N - N\alpha = 2\varphi' - \partial$; la lunghezza focale $N\alpha'$ corrispondente alla distanza αN, ossia ∂, sarà generalmente espressa (catot:) da $N\alpha' = \frac{\varphi'\partial}{\partial - \varphi'}$.
Finalmente $C'\alpha' = N\alpha' - NC' = \frac{\varphi'\partial}{\partial - \varphi} - 2\varphi' = \frac{2\varphi'^2 - \varphi'\partial}{\partial - \varphi'} = \frac{\varphi'(2\varphi' - \partial)}{\partial - \varphi'}$.

Ciò posto essendo l'oggetto AB normale all'asse dello strumento, ed appoggiando coll'estremità sua sul medesimo, il che si può sempre ottenere col dirigere l'asse ad una delle estremità dell'oggetto AB, si avrà il triangolo rettangolo $C\alpha\beta$, da cui risulta $C\alpha(r-f) : \alpha\beta :: 1 : \tan \alpha(\beta(\tan m)$; quindi $\alpha\beta = (r-f)\tan m$.
I due triangoli rettangoli simili $\alpha C'\beta$, $\alpha'C'\beta'$ danno $C'\alpha(2\varphi' - \partial) : \alpha\beta :: C'A'\left(\frac{\varphi'(2\varphi - \partial)}{\partial - \varphi'}\right) : \alpha'\beta'$; quindi $\alpha\beta = \frac{\partial - \varphi'}{\varphi'} \times \alpha'\beta'$. Paragonando i due valori di $\alpha\beta$ si troverà $(r-f)\tan m = \frac{\partial - \varphi'}{\varphi'} \times \alpha'\beta'$; quindi $\alpha'\beta' = \frac{\varphi'(r-f)\tan m}{\partial - \varphi'}$.
Finalmente dal triangolo rettangolo $T\alpha'\beta'$ si ha

$T\alpha'(\varphi'') : \alpha'\beta : : 1 : \tan \alpha' T \beta (\tan m')$ donde $\alpha'\beta' = \varphi'' \tan m$.
Paragonando i due valori di $\alpha\beta'$ si avrà $\frac{\varphi'(r-f)\tan m}{\partial - \varphi'} =$
$\varphi'' \tan m'$: donde risulta $\frac{\tan m}{\tan m'} = \frac{\varphi''(\partial-\varphi)}{\varphi'(r-f)}$ (A) espressione generale del rapporto cercato frà l'angolo ottico ad occhio inerme, e ad occhio armato.

Poichè $\partial - \varphi'$ è $= \alpha N - Nf = f\alpha$ distanza della prima immagine dal foco principale dello specchietto; ed $r - f = CM - M\alpha = C\alpha$ distanza della prima immagine dal centro C dello specchio principale, è chiaro che sostituiti i valori lineari agli analittici nella formola (A) si avrà $\frac{\tan m}{\tan m'} = \frac{T\alpha' \times f\alpha}{Nf \times C\alpha}$; quindi la tangente dell'angolo ottico ad occhio inerme stà alla tangente dell'angolo ottico armato, come il prodotto del foco principale dell'oculare per la distanza della prima immagine al foco principale dello specchietto, stà al prodotto del foco principale dello specchietto per la distanza della prima immagine dal centro dello specchio principale.

Se l'oggetto AD è a distanza infinita, allora la lunghezza focale $M\alpha$ è $= \frac{1}{2} MC$, ossia $f = \frac{r}{2}$, e però $r - f = \frac{r}{2} = \varphi$; quindi la formola (A) si riduce a $\frac{\tan m}{\tan m'} = \frac{\varphi''(\partial-\varphi')}{\varphi'\varphi}$.

255. Se l'oggetto luminoso AB si accostasse allo specchio principale GME, se ne allontanerebbe la sua immagine Aβ accostandosi per conseguenza al foco principale f dello specchietto N: Ora per tale accostamento la seconda immagine α'β' si allontanerebbe dallo specchietto N, accostandosi alla lente oculare PQ. Ora ognun vede, che non cadendo più l'immagine α'β' nel foco della suddetta lente, i raggi emergeranno da principio con mediocre divergenza, che non osterà alla visione distinta: ma dopo che l'immagine α'β' si sarà accostata notabilmente all'oculare, la divergenza sarà grandissima per l'occhio posto in O; e la visione diverrà confusa. In due maniere si può togliere questo inconveniente: 1° serrando la lente oculare PQ in un tubo mobile, onde possa allontanarsi, ed avvicinarsi all'uopo, cosicchè il foco principale della lente possa coincidere sempre colla seconda immagine α'β': 2° Se l'oculare PQ è rinchiuso in un tubo stabile, come per lo più si pratica, allora si dovrà render mobile lo specchietto concavo N per mezzo di una vite a doppio

incontro assissa RR', che passa pel braccio R'V a cui è attaccato lo specchietto. Per tal meccanismo se l'immagine $\alpha\beta$ si accosti di troppo al foco principale f dello specchietto, si allontanerà questo dall'immagine movendo la vite R da sinistra, a destra, e reciprocamente.

Se l'osservatore è presbita dovrà scostare lo specchietto dall'immagine $\alpha\beta$, onde aumentandosi la distanza αN scemi la lunghezza focale Nα', e l'immagine $\alpha'\beta'$ trovandosi in tal modo più distante dall'oculare PQ che la sua lunghezza focale principale; i raggi emergeranno un po' convergenti dall'oculare, rimediando per tal modo alla poca forza convergente dell'occhio presbita.

L'osservatore miope deve operare oppostamente.

Telescopio di Cassaigrain

256. Rappresenti EMG (fig.ª 84) uno specchio metallico concavo forato nel mezzo, come nel telescopio Gregoriano, e rinchiuso in un tubo DEKH in modo che il suo asse AO coincida con quello dello specchio. Condotti per le estremità A, B di un oggetto

Fig.ª 84

luminoso AB, e pel centro C di curvatura dello specchio grande gli assi ACM, BCb, è chiaro, che se non vi fossero ostacoli i raggi secondarj Aa', Aa''.... Bb', Bb'' concorrerebbero sui rispettivi assi a dipingere gli estremi α, β, dell' immagine rovesciata AB.

Ma se si collochi sull' asse AM uno specchietto convesso n''Np avente un apertura n''p uguale al foro mm' in modo che 1°. presenti la sua convessità allo specchio principale EG, 2° che il suo asse coincida con quello del tubo esistendo in C' il suo centro di curvatura: 3° che il luogo dell' immagine $\alpha\beta$ cada fra lo specchietto, ed il suo foco principale f.

Ciò posto siccome i raggi riflessi $\alpha\alpha'$, $\alpha''a$........ $b'\beta$, $b''\beta$....... cadono sullo specchietto convesso convergenti in punti meno distanti dallo specchio che il suo foco principale f, è chiaro (cat:) che essi verranno riflessi sulle stesse direzioni sulle quali sarebbero riflessi i raggi $\alpha c'$, $\alpha c''$....... $\beta n'$, $\beta n''$...... se partendo dall' immagine $\alpha\beta$ considerata come oggetto luminoso cadessero sulla superficie concava pn''; e poiche in tal supposizione i raggi riflessi n'd', n''d''

........$c'\alpha'$; $c''e''$....... concorrerebbero nei fochi virtuali α', β' esistenti sugli assi secondarj $C\alpha M$, $C\beta b$ condotti dal centro C' dello specchietto per le estremità α, β della supposta immagine, ed ivi dipingerebbero una immagine virtuale $\alpha'\beta'$ avente la stessa posizione che $\alpha\beta$, e per conseguenza rovesciata rispetto all'oggetto AB: perciò i raggi $\alpha'c'$, $\alpha''c''$...... $b'n'$, $b''n''$ dopo la riflessione contro lo specchietto convergeranno rispettivamente negli stessi punti α', β' ed ivi dipingeranno l'immagine reale, e rovesciata $\alpha'\beta'$. Se dunque si collochi l'oculare convesso PQ in modo che il suo foco principale coincida coll'immagine $\alpha'\beta'$, e si tiri al solito il raggio principale $\beta'TZ$; i raggi lucidi emergeranno dall'oculare paralleli ai rispettivi raggi principali TO, $\beta'T$, e l'occhio situato nell'intersezione O de' cilindri lucidi estremi, vedrà l'immagine rovesciata $\alpha'\beta'$ sotto l'angolo $TOt = \alpha'T\beta'$.

257. In una maniera analoga a quella del § 254 si può determinare l'ingrandimento di questo Telescopio. Imperocchè se si faccia come sopra

$CM = r$; $M\alpha = f$; $Nf = \varphi'$; $N\alpha = \partial$; $T\alpha' = \varphi''$; l'angolo ottico naturale $\alpha CB = \alpha C\beta = m$; l'angolo ottico ad occhio armato $TOt = \alpha'' T\beta = m'$, si avrà $C\alpha = CM - M\alpha = r - f$; il raggio $C'N$ dello specchietto $2Nf = 2\varphi'$; $C'\alpha = C'N - N\alpha = 2\varphi' - \partial$; la lunghezza focale assoluta $N\alpha'$ corrispondente alla distanza ∂ dell'opposta immagine $= \frac{\varphi'\partial}{\varphi'-\partial}$. Finalmente $C'\alpha' = N\alpha' + C'N = \frac{\varphi'\partial}{\varphi'-\partial} + \frac{\varphi'\partial + 2\varphi'^2 - 2\varphi'\partial}{\varphi'-\partial} = \frac{2\varphi'^2 - \varphi'\partial}{\varphi'-\partial} = \frac{\varphi'(2\varphi'-\partial)}{\varphi'-\partial}$.

Ciò posto il triangolo rettangolo $C\alpha\beta$ dà $Ca(r-f) : \alpha\beta :: 1 : \tan m$; quindi $\alpha\beta = (r-f)\tan m$; i due triangoli rettangoli simili $C'\alpha\beta$, $C'\alpha'\beta'$ danno $C'\alpha(2\varphi'-\partial) : \alpha\beta\,[(r-f)\tan m] :: C'\alpha'\left(\frac{\varphi'(2\varphi'-\partial)}{\varphi'-\partial}\right) : \alpha'\beta'$; quindi $\alpha'\beta' = \frac{\varphi'(r-f)\tan m}{\varphi'-\partial}$. Finalmente dal triangolo rettangolo $T\alpha'\beta'$ si ha $T\alpha'(\varphi'') : \alpha'\beta'\left(\frac{\varphi'(r-f)\tan m}{\varphi'-\partial}\right) :: 1 : \tan m'$; dunque $\frac{\varphi'(r-f)\tan m}{\varphi'-\partial} = \varphi''\tan m'$; e per conseguenza $\frac{\tan m}{\tan m'} = \frac{\varphi''(\varphi'-\partial)}{\varphi(r-f)}$ rapporto cercato.

258. Se l'oggetto luminoso AB si accosti allo specchio principale EG, allora la sua immagine se ne allontanerebbe, e si avvicinerebbe per conseguenza al foco f dello specchio convesso; quindi i raggi resi convergenti dallo specchio grande verrebbero rifles-

si dallo specchietto convesso tanto più prossimi al parallelismo quanto più vicina al foco f sarà l'immagine ideale $\alpha\beta$; quindi l'altra immagine $\alpha'\beta'$ abbandonando il foco principale dell'oculare si accosterà ad essa, ed i raggi non emergeranno più paralleli; ma bensì divergenti, il che molte volte può render indistinta la visione della medesima. Il meccanismo della vite infissa RR' a doppio incontro rimedierà a questo inconveniente rimovendo dalla posizione primitiva lo specchietto $n''p$, ed allontanando il suo foco f dall'immagine $\alpha\beta$.

Chi bramasse vedere la teoria de' microscopj Catadiottrici vegga il P. Scheuffer Catott: pag: 38, e Smith ott: vol. 2°.

Descrizione di alcuni altri Stromenti Diottrici e Catadiottrici

259. Gli strumenti di cui intendo parlare in questo articolo hanno per oggetto di rappresentare sopra superficie piane convenevolmente collocate, le immagini degli oggetti luminosi. (Veg: Haüy

Physique vol: 2°.

Camera oscura semplice

260 Fatto nell'imposta di una finestra un foro del diametro di circa 1. pollice parigino (27. mil. pro) si sa (ott:) che la luce che s'introduce in questo foro va a dipingere sul muro opposto. le immagini rovesciate, ed incerte degli oggetti luminosi.

Ma se all'apertura si applica una lente convessa, essa determinerà i raggi divergenti lanciati da punti dell'oggetto luminoso a convergere verso i rispettivi raggi principali, ed a formare quindi immagini molto più esatte, e precise che le precedenti: le quali immagini se verranno raccolte sopra un cartone bianco posto ad una distanza dalla lente, che uguagli la lunghezza del foco particolare; rappresenteranno una vera, ed elegante miniatura degli oggetti esterni, col solo incomodo di vederli rovesciati.

Camera oscura composta ossia Portatile

261 Si prepari una Cassetta NPQO (fig.ª 85) di forma parallepipede, che abbia la lunghezza RP $= \frac{1}{2}$ piede, e la larghezza QR = 2 piedi, e l'altezza RO = $2\frac{1}{2}$ piedi, che sia tinta in nero, ed esattamente chiusa da tutte le parti fuori che nella faccia QO in cui vi è una apertura LM coperta al di fuori da un drappo nero; sulla faccia superiore NO si assicuri per mezzo del braccio TT'F uno specchio piano DE inclinato alla suddetta faccia ad angolo semiretto. Indi collocata sotto lo specchio in un tubo mobile la lente convessa HGK il cui foco sia di circa $2\frac{1}{2}$ piedi, si volti lo specchio DE ad un oggetto AC fortemente illuminato da' raggi del Sole. Ognun vede che fra gl'infiniti raggi lucidi che partendo dai punti A, B, C dell'oggetto, urtano nello specchio DE, vi saranno alcuni p: esem: i tré raggi AA', BB', CC', che dopo la riflessione si dirigeranno nel centro ottico G della lente convessa

Fig. n.° 85

HGK, e divergeranno per tal modo raggi principali, sui quali si uniranno poi tutti i rispettivi raggi laterali, che partono dai punti A, B, C dell'oggetto. Quindi se la base PQ dell'assetta disti dalla lente HK quanto lo esigge la lunghezza focale Gb, si dipingerà sopra di essa l'immagine a b c dell'oggetto ABC, la quale potrà essere commodamente osservata per mezzo dell'apertura LM.

Che se l'immagine non cada precisamente sulla base PQ, basterà avvicinare, o allontanare la lente HGK dello specchio DE sino a tanto che non si veda esattamente dipinto l'oggetto AC.

Le diverse forme che si danno a questa macchina trovansi esattamente descritte nelle Ricreazioni Fisiche di Guyot, e nel 2.º Vol.º dell'ottica Smith.

Questa macchina serve mirabilmente a disegnare gli edifizj, le vedute campestri, e qualsiasi altro oggetto purchè sia molto illuminato da' raggi solari: al qual fine non altro richiedesi, che di scorrere con sottil matita sopra i contorni delle immagini dipinte sopra il fondo PQ, coperto

con foglio di carta bianca, e ben distesa.

Se alla lente HK se ne sostituisca un'altra di foco maggiore, o minore, l'immagine AC sarà più, o meno estesa che prima, donde si vede che con questa macchina si può ridurre facilmente a date dimensioni il disegno di qualsiasi oggetto.

Lanterna Magica

262. Questo Strumento inventato dal P. Kircher Gesuita, è divenuto oggidì sì triviale, che quasi è disprezzato, merita l'attenzione di quelli pur anche che non veggono in esso niente di Magico.

La costruzione più semplice di questa macchina non consiste che in una candela accesa A (fig.^e 86) presso alla quale collocasi una lente convessa BD destinata a raccogliere gran copia di luce, e a dirigerla così condensata sopra una lastrina di vetro CF sulla quale a colori trasparenti è miniato l'oggetto abd. poco distante dal foco principale c della lente convessa HGK. Quindi la sua immagine a'b'd' si dipingerà sul piano opposto LM, ingrandita, e rovesciata. Per rad-

Fig.^e 86

drizzare la suddetta immagine basta rovesciare il vetro CF sul quale è dipinto l'oggetto. La lente HGK è rinchiusa in un tubo mobile onde poterla accostare, o allontanare dall'oggetto ad, e rendendone in tal modo più, o meno grande l'immagine.

263. Sgravesand, e Smith collocano al fondo della cassetta, uno specchio concavo PQ (fig.ª 87) che ricevendo i raggi dalla candela accesa A, li dirigge riflessi sulla lente convessa BD, che riunendo insieme i raggi ricevuti dallo specchio, e quelli che direttamente le vengono dalla fiamma A, li dirigge sull'oggetto ad dipinto sul vetro a colori trasparenti.

Fig.ª 87

I raggi luminosi che partono divergenti dai punti a,d, dell'oggetto ad attraversano la lente convessa intermedia, o raccoglitrice B'D' da cui escono meno divergenti, o se si vuole anche convergenti, e passano per l'apertura circolare eg di un diaframma EG destinato ad intercettare i raggi inutili, ed i perniciosi: l'ultima lente convessa HK rinchiusa in un tubo mobile determina completamente i suddetti raggi a riunirsi sui rispettivi

raggi principali, e a dipingere in conseguenza
sull'opposto piano I.M l'immagine rovesciata
a'd', la quale apparirà raddrizzata se nella mac-
china si capovolga il vetro CF. –

Microscopio Solare

Fig.a 86 Fig.a 88

264. Questa macchina altro non è che la lanterna
magica semplice della (fig. 86), nella quale inve-
ce della luce della candela si fanno cadere per mez-
zo di uno specchio piano PQ (fig.a 88) e mobile
per ogni verso i raggi solari sulla lente BD, della
quale essendo raccolti, e diretti sul piccolo oggetto
trasparente da poco più lontano dalla lente KH
del suo foco principale C, dopo le rifrazioni vanno
a dipingere sull'opposto piano I.M l'immagine
rovesciata, ed ingrandita a'd' dell'oggetto luminoso
ad.

Fantasmagoria

265. Una piccola modificazione fatta nella lan-
terna magica, la rende idonea a produrre effetti
molto più sorprendenti che gli ordinarj, a cui il Fi-

sici hanno dato il nome di Fantasmagoria. Gli spettatori niente veggono del meccanismo della operazione, sendo stesa fra essi, e lo stromento una mussolina gommata posta verticalmente, sulla quale illbensi dipingere le immagini, che riescono visibili a motivo della trasparenza dello strato. La camera non deve aver altra luce fuorchè quella che viene dall'apparato nascosto dietro la suddetta tela. Appena s'incomincia l'operazione si vede a comparire uno spettro da prima piccolissimo, che in seguito rapidamente si aumenta; e sembra, avventarsi a gran passi contro gli spettatori: e quando l'operazione facciasi (Haüy vol: 2°. pag: 397) in un luogo sotterraneo, tapezzato di nero, e che un cupo silenzio interotto soltanto da suoni lugubri di flebili stromenti ha servito di preludio, è difficil cosa il riescire nel potersi garantire da una certa impressione di spavento alla vista di un oggetto orrendo, che trova l'immaginazione completamente disposta a realizzare i fantasmi.

266. Per comprender facilmente gli effetti prodot-

ti da questa macchina basterà riflettere, che quanto più un oggetto luminoso è vicino al foco principale di una lente convessa tanto più lontana, più grande e più smonta apparirà l'immagine di lui; e reciprocamente quanto più l'oggetto si allontana dal foco principale della lente, tanto più vicina, più piccola, e più chiara sarà l'immagine dell'oggetto.

Ciò posto figuriamoci una lanterna magica talmente costrutta, che mentre essa scorrendo sopra un tavolino si allontana dalla mussolina gommata, e trasparente LM, il porta oggetto FC (fig.a 86) si accosti con tal legge al foco principale C della lente HK che l'immagine dell'oggetto ad cada sempre sullo strato LM, là si vedrà successivamente aumentata, e quand'essa conservi un certo grado di chiarezza, lo spettatore già disposto all'illusione la giudicherà molto a se vicina. Per lo contrario se accostando la lanterna alla mussolina si allontani l'oggetto ad dal foco C della lente, l'immagine a'd' scemerà in dimensione, e se scemi eziandio la sua chiarezza, si crederà che si allontani.

Fig.a 86

Nelle ordinarie macchine di Fantasmagoria l'ingrandimento dell'immagine è accompagnato dallo scemamento di chiarezza, e reciprocamente la diminuzione dell'immagine da aumento di chiarezza: il che costituisce un diffetto notabile, che si oppone alla completa illusione di operatori.

Della grandezza, distanza luogo e moto apparente degli oggetti, e di alcune illusioni ottiche.

267. Quando un oggetto si accosta a noi, quattro cose generalmente si osservano 1°. apparisce più grande; 2°. più chiaro; 3°. si distinguono in esso parti piccole, che a maggior distanza non si vedevano; 4°. si sminuisce il numero degli oggetti che prima erano frapposti fra noi, e l'oggetto osservato.

Per lo contrario se l'oggetto da noi si allontana sensibilmente si osserva 1°. Che esso diventa più piccolo; 2°. pallido, o smonto; 3°. non più si distinguon molte di quelle parti che di esso si distinguevano; 4°. si aumenta il numero degli og-

getti frapposti.

Dal concorso di tutte, o di alcune delle quattro accennate circostanze risultano i moltiplici, e svariati giudizj che da noi si formano intorno alla grandezza apparente, ed alla distanza degli oggetti: Giudizj che a cose pari talvolta sono diversi secondo che gli oggetti osservati ci sono famigliari, o affatto nuovi.

Così se suppongasi che nello spazio libero da oggetti interposti esistano due corpi BC, DE (fig.ª 89) non mai prima osservati da vicino, e che siano ugualmente chiari, e talmente disposti che gli assi ottici COB, EOD sieno uguali, noi li giudicheremo ugualmente grandi, ed ugualmente lontani. Ma se uno di questi per esem: DE sia stato altre volte da noi osservato, e riconoscesi per tale, allora l'idea di lui ci risveglia pur anche quella della sua grandezza apparente altre volte avuta, e de' corpi ai quali fù da noi paragonato, ed allora sebbene apparisca sotto lo stesso angolo ottico che l'altro oggetto BC; non per tanto per l'accennata consociazione

Fig.ª 89

d'idee lo giudichiamo più grande; se la chiarezza sua non molto differisca da quella di BC, e se fra lui e l'occhio non esista maggior numero di oggetti interposti che fra l'occhio, e BC, allora ancorchè sia realmente più lontano che BC noi lo giudichiamo presso a poco alla stessa distanza, e forse anche più vicino.

Del resto sonovi alcune determinate distanze entro le quali noi piuttosto per uso, e per l'esperienza sogliam giudicare della grandezza assoluta degli oggetti con molto maggior esattezza; che dall'angolo ottico sotto il quale ci appariscono. Così a parità di cose il nostro giudizio non cangiasi intorno alla grandezza di un uomo a noi cognito sia che si osservi alla distanza di soli pochi passi, sia che a doppia distanza egli si trasporti, sebbene nel secondo caso l'angolo ottico riducasi alla metà circa di quello che formasi nel primo.

Dissi a parità di cose; imperocchè se l'oggetto allontanandosi dall'occhio prende una posizione rispetto all'orizzonte diversa da quella che han-

-no i corpi che più di spesso da noi osservatisi, che appunto è la posizione verticale; così se a poca distanza dal piede di una torre osservisi un uomo collocato sul vertice di essa, apparirà molto più piccolo di quello che apparirebbe in posizione verticale, supposto sempre lo stesso angolo ottico.

268. Se fra due oggetti dati l'occhio non possa distinguere altri oggetti frapposti, o spazio da potervili collocare, e se il grado di chiarezza, e dis distinzione non sia molto diverso per amendue, allora si giudicheranno ugualmente lontani, ed esistenti per conseguenza su d'un medesimo piano normale alla direzione dell'asse ottico. Così un osservatore collocato in una vastissima pianura, giudica gli oggetti lontanissimi tutti equidistanti dall'occhio, e vede in conseguenza intorno a se descritto quel circolo, che appellasi orizzonte apparente.

Così una piccola linea, o curva o spezzata posta a gran distanza dall'occhio apparirà come un arco di pochi gradi, e sensibilmente come una linea retta. Così se all'occhio presentinsi sfere luminose

per esem: il Sole, e la Luna, non potendo esso distinguere la differenza fra la chiarezza de' punti vicini al circolo terminatore, e di quelli che sono vicini all'asse, crederemo tutti questi punti egualmente lontani; quindi le due sfere che io suppongo di mediocre grandezza apparente, ci compariranno come aree circolari. Per la stessa ragione una torre quadrangolare o poligona che abbia tutte le faccie ugualmente illuminate ci apparirà piana.

269. Se per qualche motivo ci troviamo indotti a giudicar che un oggetto sia più distante di quello che lo sia realmente, allora questo oggetto ci apparirà ingrandito. Imperocchè formandosi sempre nel nostro occhio lo stesso angolo ottico relativo alla distanza, se l'oggetto, che sempre è compreso fra i lati dell'angolo ottico, giudicasi più distante, dobbiamo necessariamente attribuirgli maggiore estensione, onde possa toccare i suddetti lati dell'angolo ottico.

Da questo principio si spiega 1° perchè il Cielo non apparisca una sfera, ma a forma di una vol-

ta schiacciata al vertice, e dilatata verso l'orizzonte. Imperocchè a motivo della gran copia di vapori, e del maggior tratto di atmosfera che percorrer deve la luce lanciata dai corpi posti all'orizzonte, essi debbono necessariamente essere meno risplendenti in vicinanza di questo piano, che verso lo Zenit; e poichè noi siamo avvezzi a giudicar lontano quando null'altro a ciò si opponga, quell'oggetto che è più smonto, e che ci si presenta preceduto da gran quantità di oggetti interposti; ognun vede, che questi oggetti per due cagioni ci debbono apparir più lontani 1°. perchè sono pallidi; 2°. perchè scorgesi gran numero di oggetti interposti, quali sono a cagion d'esem: gli alberi, le case, le montagne. Per lo contrario lo stesso corpo lucido per esem: la Luna esistente verso lo Zenit ci deve apparir più chiaro, e per conseguenza più vicino al nostro occhio. Ora poichè tutti i punti del cielo ci sembrano per le accennate diminuzioni di luce tanto più lontani, quanto più s'allontanano dallo zenit, chiaro è, che noi non possiamo giudicare sferica la volta del Cielo, giac-

chè tal giudizio esigerebbe quello di una ugual lontananza di tutti i punti del Cielo.

Dalla percezione di molti oggetti frapposti, e dalla pallidezza del Sole, e della Luna posti sull'orizzonte, restando celata la cagione di tal pallidezza si desume la spiegazione del loro ingrandimento, giacchè restanto invariato l'angolo ottico formato nel centro della pupilla, e giudicandosi più lontano l'oggetto di quello che sia, gli si deve attribuir maggior dimensione affinchè possa restar compreso fra i lati prolungati dell'angolo ottico. Aggiungasi, che l'osservatore non accorgendosi de' vapori areiformi sparsi per l'aria, non sa attribuir la diminuzione di luce che all'allontanamento degli oggetti. Diffatti seguendo, l'occhio si accorge dell'ostacolo frapposto come di uno strato di densa nebbia; o di un cristallo affumicato, benchè il Sole resti impallidito, pure non lo giudica allontanato.

De' moti apparenti e relativi

270 Chiamasi moto apparente di un oggetto quello,

che l'osservatore moventesi, e persuaso di esser in quiete attribuisce ad un oggetto realmente immoto.

Il moto relativo di un oggetto è quello che l'osservatore in movimento attribuisce ad un corpo del pari in moto.

Il luogo vero dell'occhio è quel dato punto dello spazio in cui realmente trovasi l'occhio in un dato istante; ed il luogo supposto è quello in cui l'osservatore crede di essere. Così 'l luogo vero dell'oggetto è il punto in cui realmente esiste; il luogo ottico è quello a cui vien riferito dall'osservatore.

Ciò premesso suppongasi che l'occhio A (fig.ª 91) si muova sulla retta AD, e l'osservatore credasi immoto, egli attribuirà al punto B immobile un movimento uguale, ed opposto al suo, e corrispondente in tutto a una direzione BB' parallela a quella dell'occhio. Infatti siccome noi ci accorgiamo del movimento di un corpo quand'esso cangia posizione rispetto ad un altro punto, o ad un asse, o piano fisso, che può appellarsi piano di comparazione, è chiaro che se AD rappresenti uno di questi assi, per esem:

Fig.ª 91

l'orizzontale; nella posizione A la distanza angolare dell'oggetto B dall'asse era espressa dall'angolo BAD, il quale se è costante, e se l'oggetto B non presenta variazione alcuna o in diametro, o in chiarezza onde possa sospettarsi che esso si allontani, o si avvicini sulla direzione AB, l'osservatore giudicherà immobile il punto B, giacchè in tale ipotesi non ha indizio alcuno di cangiamento di posizione, o di distanza dell'oggetto B nè da se stesso, nè dal piano di comparazione CD.

Ora se l'osservatore trasportisi in A', ed ivi osservi l'oggetto B, s'accorge subito che l'angolo BA'D non è più uguale all'angolo BAD; e credendo se stesso immobile in A per render ragione dell'accennato cambiamento d'angolo, dovrà neccessariamente supporre che l'oggetto B siasi trasportato da B in un nuovo punto B' in cui la nuova posizione angolare supposta B'AD sia uguale alla vera BA'D, ed i cangiamenti di chiarezza, è di diametro dell'oggetto possono aver luogo come nella posizione rispettiva; è reale BA'. Ciò posto, se suppongasi che l'oggetto

B si muova colla stessa velocità con cui si muove l'osservatore, cosicchè sia BB' = AA', e che in direzione opposta alla sua si trasporti da B in B' parallelamente alla direzione dell'occhio AA': è chiaro che la posizione relativa opposta B'AD presenterà tutte quelle circostanze che possono aver luogo nella posizione relativa reale BA'D. Ora poichè BB' è parallela, ad AA', l'ang: B'AD = ang: BA'D, anche le due AB', A'B saranno parallele, e per conseguenza B'BA'A sarà un parallelogrammo le cui diagonali indicheranno colle loro estremità A, B, A', B' il luogo supposto dell'occhio, il luogo vero dell'oggetto, il luogo vero dell'occhio, ed il luogo ottico dell'oggetto.

Tav.a I

Tav.a II

Figª 11
A
B
E
E
H
K
L
P
a
a'
a''
r
g
e'
f'
a
f
b'
b''

Tav.a III

A
P
B
I
D
N
T
A
P
N
A'
Fig.ª 16
T
A
B
C
17
m n r p s e t f P g
Q
R
C
A
P N
f
C'
B'
A'
A'
C'
Fig.ª 18
C'
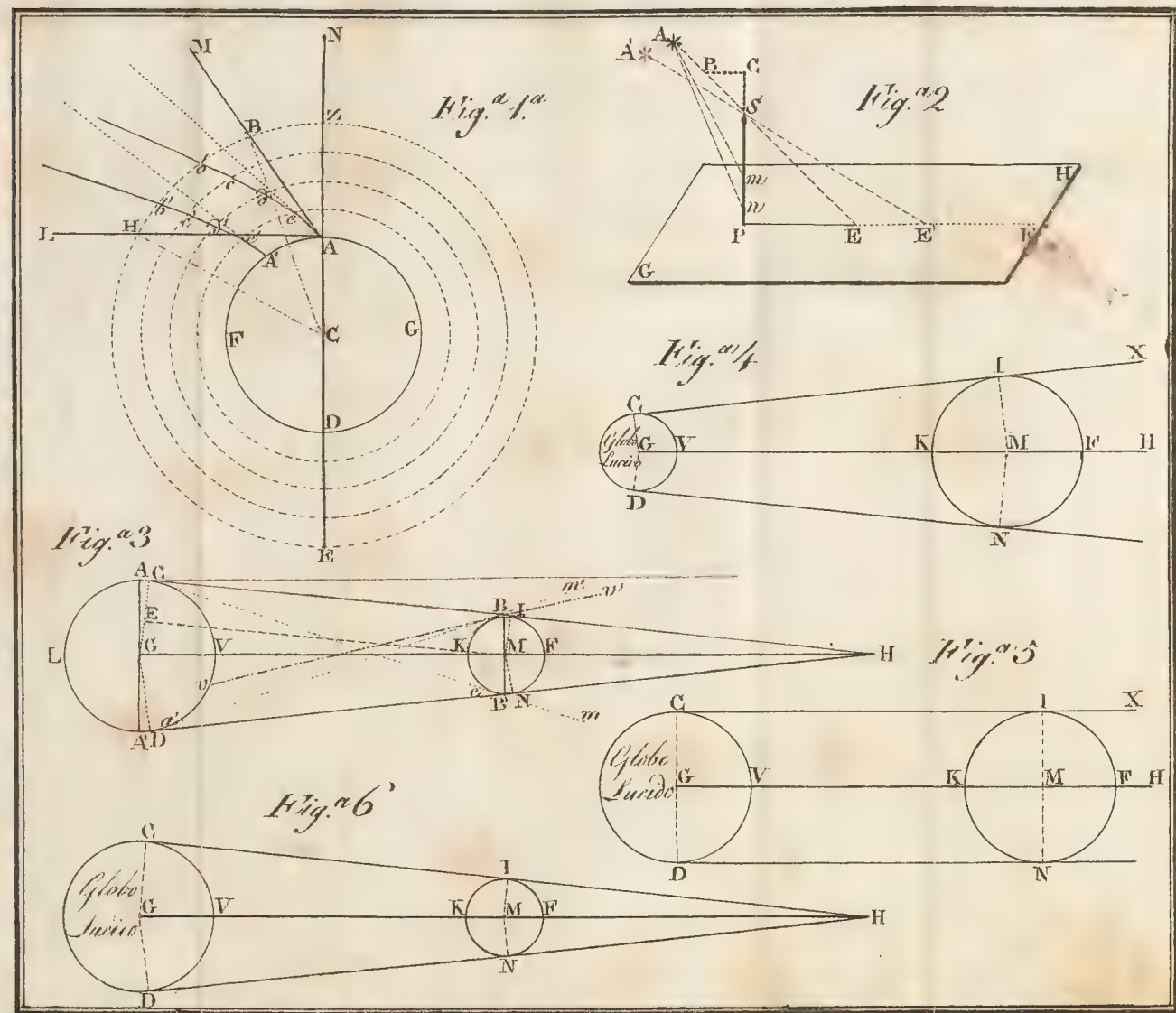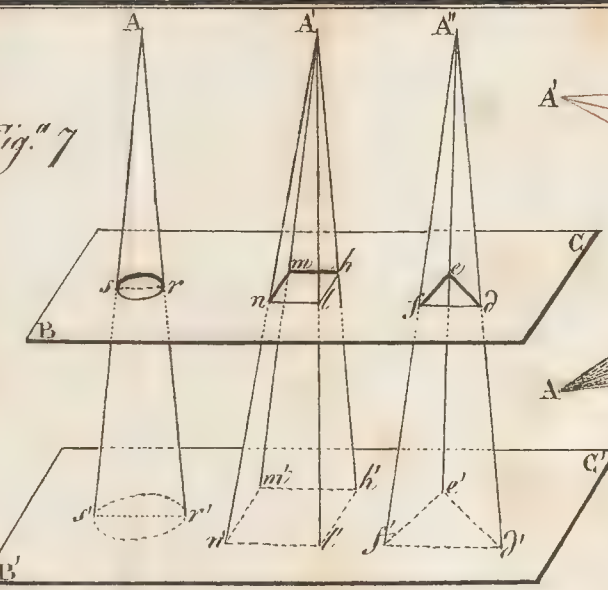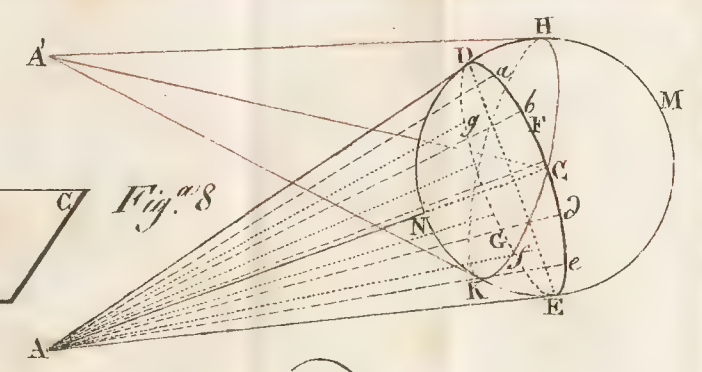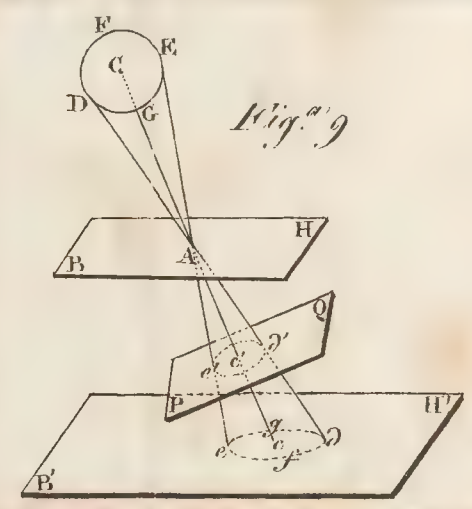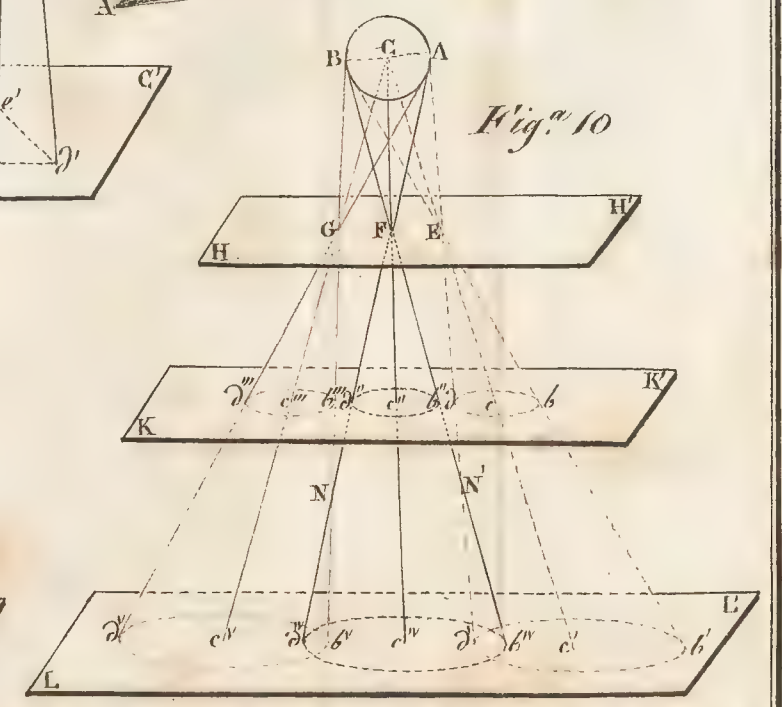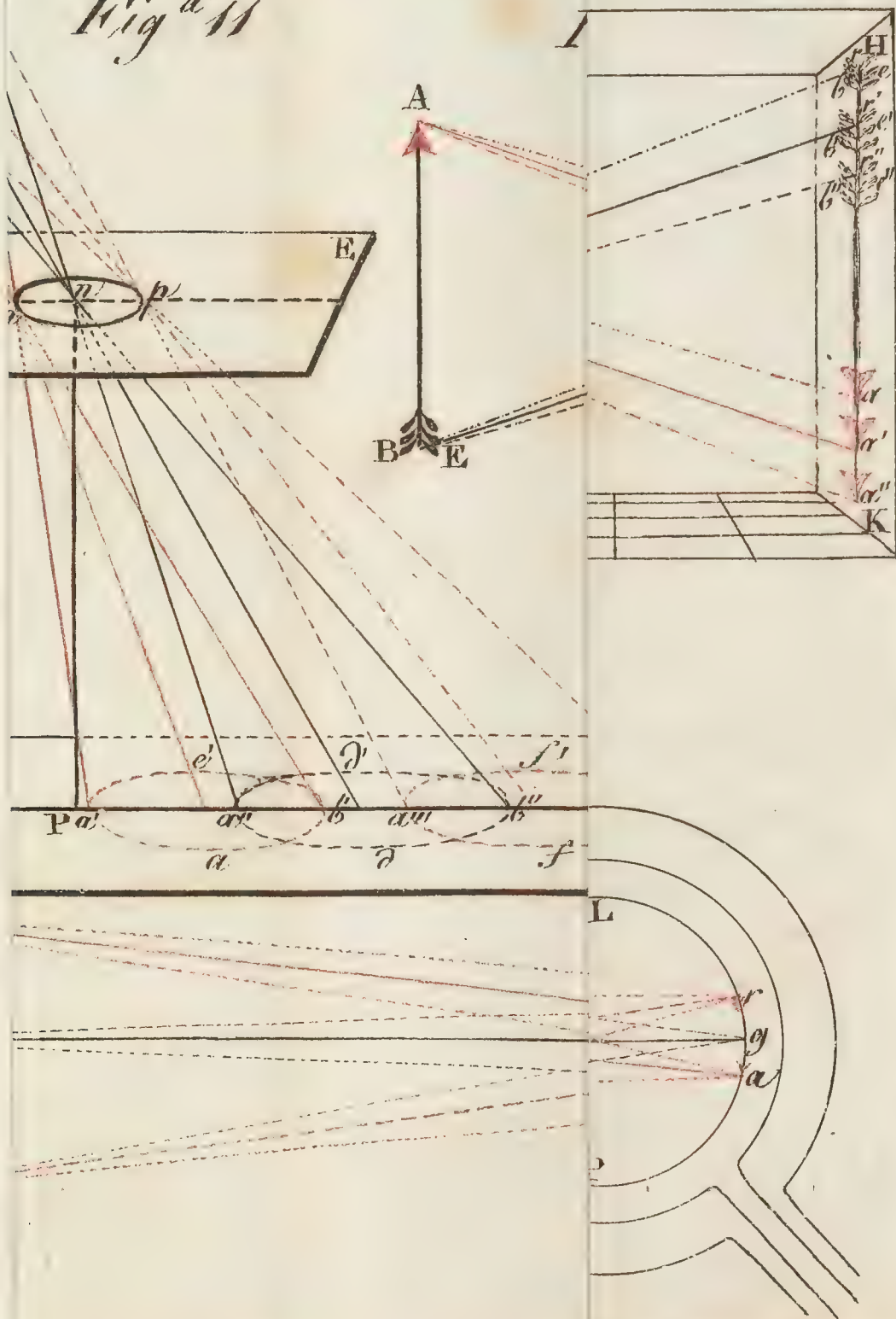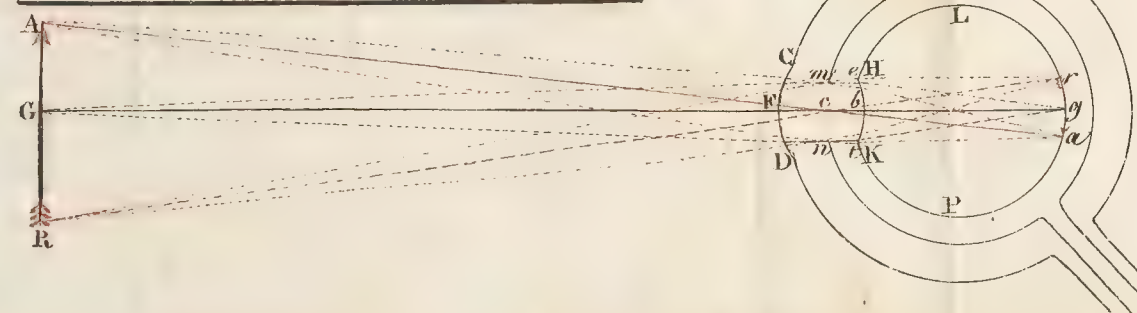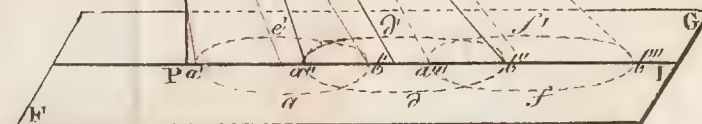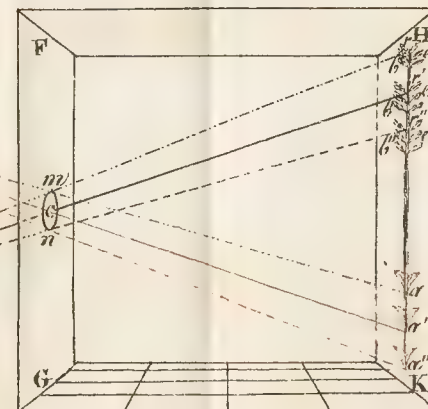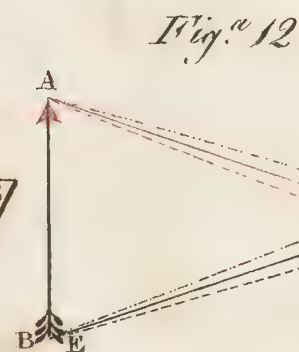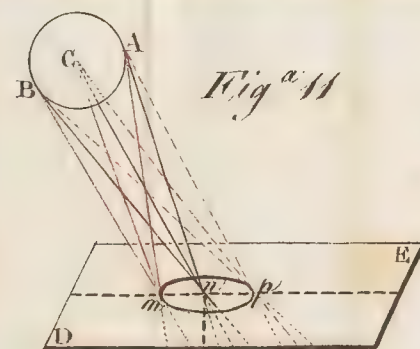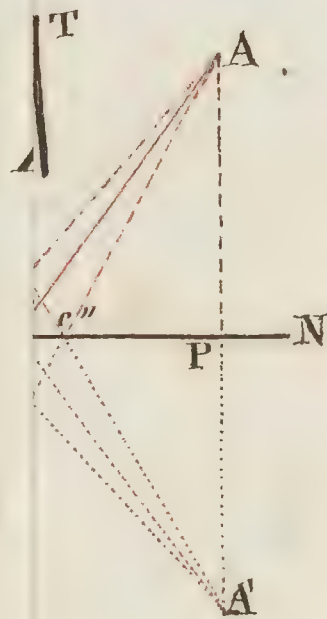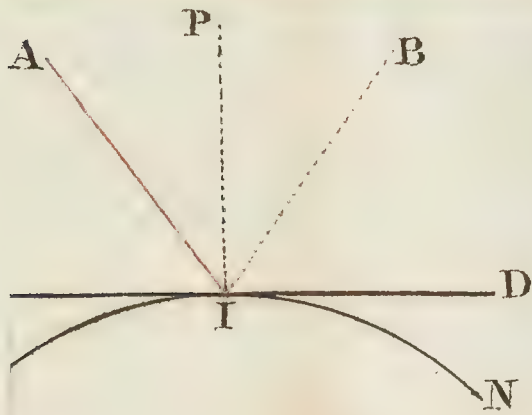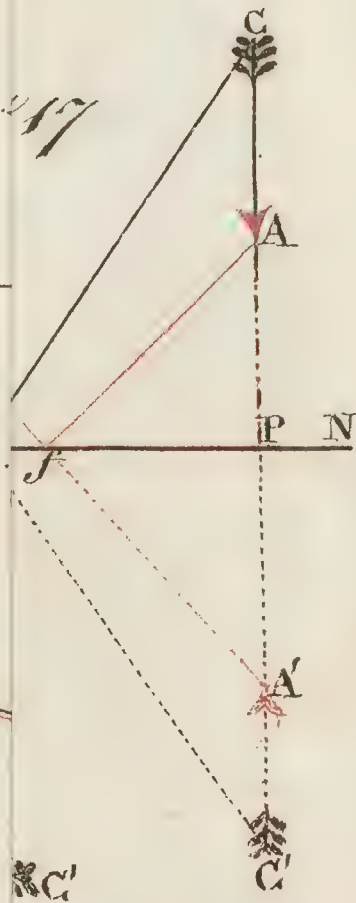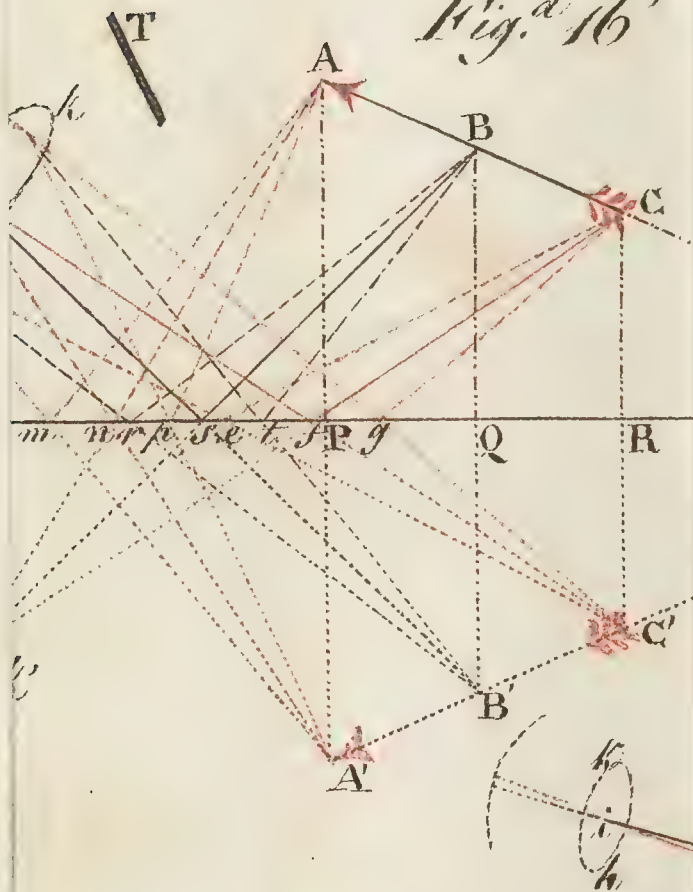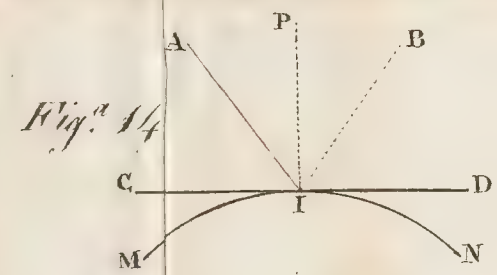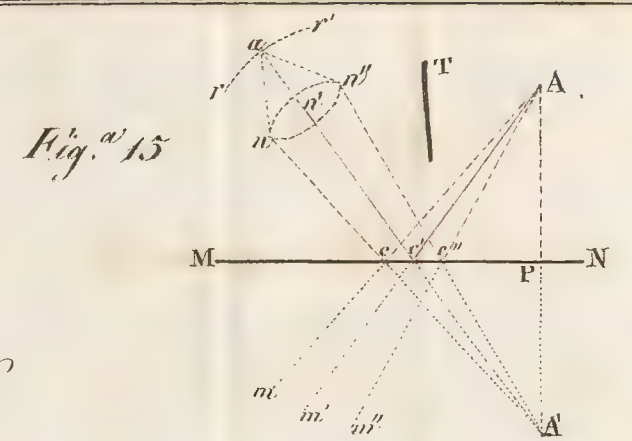
Fig.ª 14

Fig.ª 15

Fig.ª 16

Fig.ª 17

Fig.ª 18

M
C
R
C'
f'
E
n
n'
A
A'
f
N
C
A
P
P'
a
c
a'
c'
A
a
L
s
S
I
Fig.ª 20
A
b'''
b''
B
E
a''
a'''
F
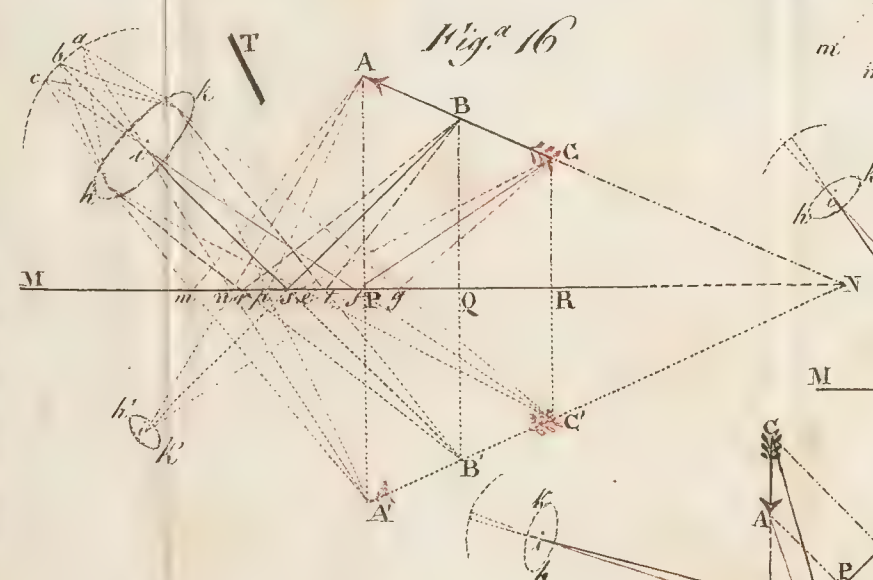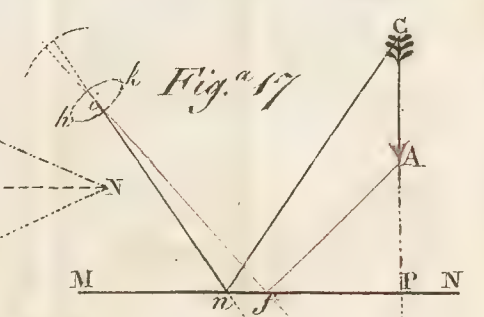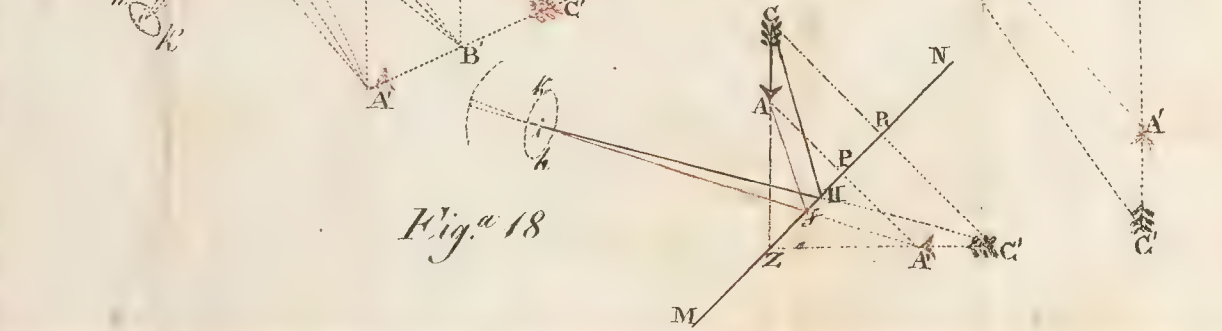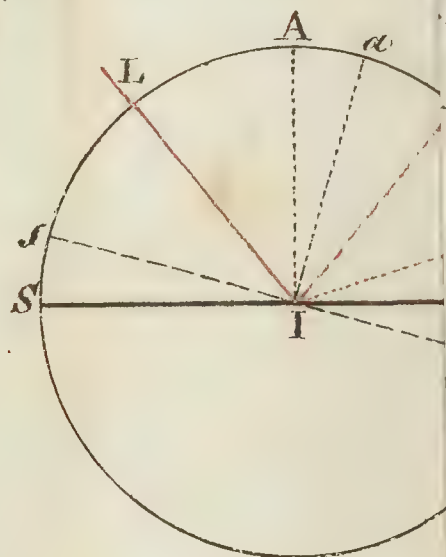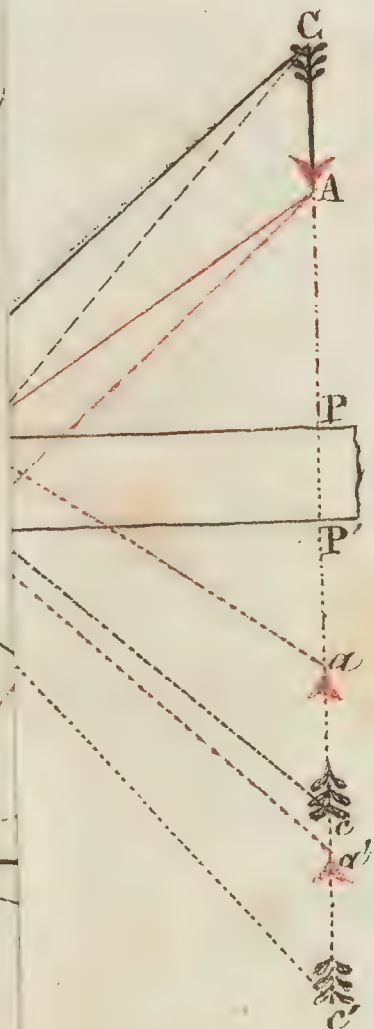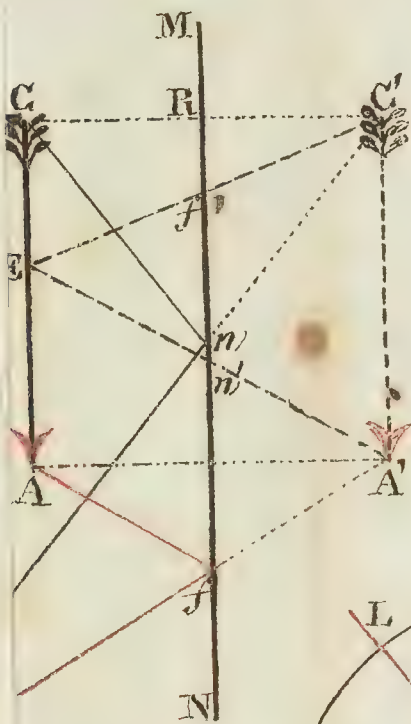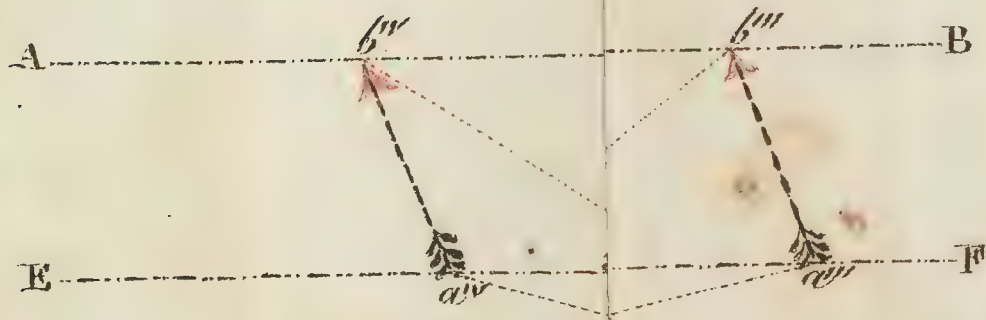
Fig.a 19

Fig.a 20

Fig.a 21

Fig.a 22

Tav.ª VI

Fig.^{a} 23

Tav.ª VII

Fig.ª 24

Fig.ª 27

Fig.a 24
Fig.a 25
Fig.a 26
Fig.a 27

Fig.ª
P
N''
N'
N'''
A''
A'
A'''
A''
M''
M'
M
Q
Fig.ª 29
G
n
mo
a
O
G
B
Q
C
S
N
p
C
S
O
D
S
S
S
C'
B'

Fig.a 28

Fig.a 29

Fig.a 30

Tav.a IX

Fig.a 32

Fig.a 33

Fig.a 34

Fig.ᵃ 31
M'
K
M
A'
A
A''
n
C
P'
P
P''
Fig.ᵃ 32
n
C
M
A'
A''
R
M'
M''
P'
P
P''
Fig.ᵃ 33
G''
D
B''
G
G'
E''
C
A''
F
L
A'
K
E
A
M
B'
D'
B
Fig.ᵃ 34
B
G
D
K
F
L
C
A
D'

ª 35
Figª 36
Figª 37
C
n
f
g
Q
A
B
Z
I
P
C
D
p
n'
n
t
e
G
m
n'
q

Tav.a X

Fig.a 35

Fig.a 36

Fig.a 37

Tav.a XI

Fig.a 38
Fig.a 39
Fig.a 40

Fig.ª 42
H
G'
H'
G'
O
Z
C'
T
B'
S'
Q
T'
V
Z'
Fig.ª 43
M
B
D
G
A
C
L
K

Tav.ª XII

Fig.a 45
Fig.a 46
Fig.a 47
Fig.a 48
Fig.a 49.
Fig.a 50
Fig.a 51
Fig.a 52
Fig.a 53

Fig.a 54
Fig.a 55
Fig.a 56
Fig.a 57
Fig.
Fig.a 59

Fig.a 54
Fig.a 55
Fig.a 56
Fig.a 57
Fig. 58
Fig.a 59

Tav.a XV

Fig.a 60
Fig.a 61
Fig.a 62

Tav.a XVI

Tav.a XVI

H
B
n
p
Q
e
G
C
L
F
Fig.ª 68
N
E
G
ª 69
H
B
Q
L
C
G
70
G'
D
B'
A
F
E
A'
C
B
M
G
v'
r
I
v
v''
s
H
N

Fig.ª 67
Fig.ª 68
Fig.ª 69
Fig.ª 70
Fig.ª 71

Tav.ª XVIII

Fig.a 72
Fig.a 73
Fig.a 74
Fig.a 75

Tav.a XIX

Fig.a 76
77
Fig.a 78
a 80
A
B
G
C
H
F
g
g'
m
n
o
p
G
H
a
b
P'
R'
P
Q
F
R
L
O
L
M
N
N'
M'
L'
D
H
G
F
P
I
E
A
9
Q
N
O
G
T
I

Tav.a XIX

Tav.a XX

a 82

Fig.a 81

Fig.ª 82

Fig.ª 81

Tav.a XXI
D
C
V
N
f
α
β
C'
O
H
R
R
D
C
C'
f
α
β
N
Z
O
t
H
R'
R

Tav.a XXI
Fig.a 83
Fig.a 84

Tav.ª XXII

Tav.a XXII
Fig.a 85
Fig.a 86
Fig.a 87

Tav.a XXIII
S
B
L
a
b
∂
P
D
M
89
E
D
e
∂
E
C
B
D
M
m
A
B
B″
B′
B
91
C
A
A′

Tav.a XXIII

Fig.a 88
S
S
S
Q
P
P
P
B
D
H
G
K
L
M
Fig.a 89
O
C
B
E
D
Fig.a 90
Z
N
E
D
z
n
e
M
m
A
C
B
Fig.a 91
B″
B′
B
b′
b″
C
A
A′
A″
D